D19

MAR 1

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 170

Heft 4

Ausgegeben den 8. Februar 1934

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1934

Band 170. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Bögel, Karl, Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen	197
Rothe, Erich, Über die Integralgleichung des Skineffekts	218
Grün, Otto, Zur Fermatschen Vermutung	231
Magnus, Wilhelm, Über den Beweis des Hauptidealsatzes	235
Li, Ta, Berichtigungen zu meiner Arbeit „Neue Beweise zu den Carmichaelschen Sätzen über die Reihe $\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+n)$"	241
Bieberbach, Ludwig, Zusatz zu meiner Arbeit „Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem" in Band 165 dieses Journals	242
Inhaltsverzeichnis der Bände 161—170	243

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen.

Von *Karl Bögel* in Halberstadt.

In der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen hat man sich im allgemeinen auf die Untersuchung der partiellen Ableitungen, also „linearer" Differentiationsprozesse, beschränkt. Die Folge war, daß diese Theorie nie die Geschlossenheit erreicht hat, welche wir an der Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen bewundern, sondern einen unbehaglichen Charakter der Zufälligkeit und Systemlosigkeit in sich trug.

Für Mengenfunktionen ist der Begriff der Ableitung durch Herrn Lebesgue [1]) in einer Weise definiert worden, die ihn ganz unabhängig von der Dimensionalität der betrachteten Menge macht; seine Idee ist von den Herren De la Vallée-Poussin [2]) und Carathéodory [3]) ausgebaut und vereinfacht worden [4]). Leider ließ sich aber diese Idee auf die Ableitung von Punktfunktionen nicht anwenden, da eine Mengenfunktion stets ein Skalar ist, während es sich schon bei der Ableitung einer Funktion einer Veränderlichen um den Grenzwert eines Quotienten handelt, dessen Zähler und dessen Nenner vektorielle Größen sind.

In der vorliegenden Arbeit treten nun solche vektoriellen Funktionen auch für mehrdimensionale Intervalle auf; die Grenzwerte ihrer Quotienten, die „mehrdimensionalen Ableitungen", bilden die Grundpfeiler eines neuen in sich geschlossenen Systems, welches die Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen als Spezialfall vollständig enthält. Als Kernstück der dabei auftretenden neuen Ergebnisse kann wohl der Mittelwertsatz des § 9 angesprochen werden; aus ihm folgt u. a. in § 11 eine neue, besonders einfache Form des Restgliedes der Taylorreihe.

Nicht unerwähnt möge bleiben, daß schon Bettazzi [5]) und Vitali [6]) das Vorhandensein zweidimensionaler Ableitungen für Funktionen zweier Veränderlichen in einigen Spezialfällen bemerkt haben, ohne sie indes dem Aufbau einer Theorie zugrunde zu legen.

§ 1. Bezeichnungen.

Es sei $k \geqq 1$, dann wird der Veränderlichenkomplex $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ zu X_k zusammengefaßt, analog die Komplexe $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ zu A_k und B_k usw.

[1]) Ann. éc. norm. (3), **27** (1910), p. 361/450.
[2]) Cours d'analyse **2** (2. éd.), p. 109/117, und Intégr. de Lebesgue, p. 57/104.
[3]) Vorl. über reelle Funktionen (Leipzig 1918), p. 480/499.
[4]) Man vergleiche auch den Enzyklopädieartikel IIC, 9b von Montel-Rosenthal (insbes. Nr. 47).
[5]) Giorn. di Battagl. XXII (1884), p. 133ff., und XXVI (1888), p. 21ff.
[6]) Atti Academ. Torino **43** (1907/8), p. 237/46.

Ist $r \leqq k$, so möge X_{kr} einen Teilkomplex von X_k bezeichnen, der aus r Elementen besteht; das Symbol X_{kr} ist also mehrdeutig, es läßt $\binom{k}{r}$ verschiedene Deutungen zu. Soll an einer bestimmten Auswahl X_{kr} festgehalten werden, so wird dies gelegentlich durch X_{kr}^* gekennzeichnet; der zu X_{kr}^* komplementäre Teilkomplex von X_k werde $X_k - X_{kr}^*$ geschrieben.

Zwei feste Punkte A_k und B_k im k-dimensionalen Raum, deren gleichnamige Koordinaten a_ν und b_ν stets verschieden sind ($1 \leqq \nu \leqq k$), bestimmen ein abgeschlossenes k-dimensionales Intervall $[A_k; B_k]$, wenn man jede Veränderliche x_ν im abgeschlossenen eindimensionalen Intervall $[a_\nu; b_\nu]$ variieren läßt. Wir bezeichnen dann den zuerst genannten Punkt A_k als Anfangspunkt, den nachgestellten Punkt B_k als Endpunkt dieses k-dimensionalen Intervalles. Das Intervall $[A_{kr}^*, B_k - B_{kr}^*; B_{kr}^*, A_k - A_{kr}^*]$ ist also als Menge identisch mit $[A_k; B_k]$, besitzt aber, wenn $r < k$ ist, einen anderen Anfangs- und einen anderen Endpunkt. Wenn für mindestens einen Wert von ν die Gleichung $a_\nu = b_\nu$ gilt, so degeneriert das Intervall zu einem niederer dimensionierten.

Um aber ein abgeschlossenes r-dimensionales Intervall im k-dimensionalen Raume genau bezeichnen zu können, benutzen wir das Symbol $[A_{kr}^*; B_{kr}^* \mid P_k - P_{kr}^*]$; es bedeute, daß X_{kr}^* in $[A_{kr}^*; B_{kr}^*]$ variiere, dagegen $X_k - X_{kr}^*$ auf dem Wertsystem $P_k - P_{kr}^*$ festgehalten werde.

Außer dem gewöhnlichen Summenzeichen $\sum_{\varrho=1}^{n}$, das eine Summe von n Summanden bedeutet, werden wir noch das Symbol S benötigen, dem eine andere Bedeutung zukommt. Wollen wir nämlich etwa die 2^k Funktionswerte $f(A_{kr}, B_k - B_{kr})$ summieren, so schreiben wir $\overset{k}{\underset{r=0}{S}} f(A_{kr}, B_k - B_{kr})$; in dieser Summe gehören also zu jedem festen Werte von r stets $\binom{k}{r}$ Summanden.

§ 2. Additive Intervallfunktionen.

Es sei jedem Intervall $[A_k; B_k]$ eine Zahl $\Psi_k[A_k; B_k]$ zugeordnet, und zwar genüge diese Intervallfunktion Ψ_k der Beziehung

$$(1) \qquad \Psi_k[A_k - a_\nu, x_\nu; B_k] - \Psi_k[A_k - a_\nu, x_\nu; a_\nu, B_k - b_\nu] = \Psi_k[A_k; B_k]$$

für jeden Wert von $\nu (1 \leqq \nu \leqq k)$ und jeden Wert von x_ν. Eine solche Intervallfunktion heiße additiv[7]); die Grundrelation (1) läßt sich durch Vertauschung von a_ν und x_ν auch in der Form

$$(1\,a) \qquad \Psi_k[A_k; B_k - b_\nu, x_\nu] + \Psi_k[A_k - a_\nu, x_\nu; B_k] = \Psi_k[A_k; B_k]$$

schreiben.

Nun sei X_{ks} ein bestimmter Teilkomplex von X_k, dann läßt sich aus (1) folgern die Beziehung

$$(2) \qquad \Psi_k[A_k; B_k] = \overset{s}{\underset{r=0}{S}} (-1)^r \Psi_k[X_{ks}, A_k - A_{ks}; A_{ksr}, B_k - B_{ksr}].$$

Hierbei ist $s \leqq k$, und die Summe rechts über alle 2^s Teilkomplexe A_{ksr} von A_{ks} erstreckt. Der Beweis geschieht induktiv:

1. Für $s = 1$ ist (2) wegen (1) richtig.
2. Es sei (2) richtig für den Komplex $X_{k\bar{s}} = X_{ks} - x_\nu$; es sei also

[7]) Unsere Intervallfunktionen sind also nicht Spezialfälle von Mengenfunktionen wie die Intervallfunktionen in Carathéodory, Vorl. über reelle Funktionen (Leipzig 1918), p. 502ff. Denn der Wert unserer Intervallfunktion hängt wesentlich von der Wahl des Anfangspunktes des betrachteten Intervalles ab.

$$(3)\qquad \Psi_k[A_k; B_k] = \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^r \Psi_k[X_{k\bar{s}}, A_k - A_{k\bar{s}}; A_{k\bar{s}r}, B_k - B_{k\bar{s}r}].$$

Nach (1) wird hieraus

$$\begin{aligned}(4)\qquad \Psi_k[A_k; B_k] &= \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^r \Psi_k[X_{ks}, A_k - A_{ks}; A_{k\bar{s}r}, B_k - B_{k\bar{s}r}] \\ &\quad - \sum_{r=0}^{s-1} (-1)^r \Psi_k[X_{ks}, A_k - A_{ks}; A_{k\bar{s}r}, a_\nu, B_k - B_{k\bar{s}r} - b_\nu] \\ &= \sum_{r=0}^{s} (-1)^r \Psi_k[X_{ks}, A_k - A_{ks}; A_{ksr}, B_k - B_{ksr}],\end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist.

Wichtig ist insbesondere der Spezialfall $s = k$, also die Beziehung

$$(5)\qquad \Psi_k[A_k; B_k] = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \Psi_k[X_k; A_{kr}, B_k - B_{kr}],$$

deren rechte Seite 2^k Summanden enthält.

In (5) erscheint der Wert $\Psi_k(A_k; B_k]$ unserer Intervallfunktion additiv zusammengesetzt aus ihren 2^k Werten über solche Intervalle, welche einen gemeinsamen Anfangspunkt X_k und je einen der Eckpunkte von $[A_k; B_k]$ als Endpunkt besitzen; das Vorzeichen des Summanden ist positiv oder negativ, je nachdem der betreffende Eckpunkt $(A^*_{kr}, B_k - B^*_{kr})$ vom Endpunkte B_k des Intervalles $[A_k; B_k]$ aus über eine gerade oder über eine ungerade Anzahl Kanten von $[A_k; B_k]$ erreicht wird. Der Wert von

$$\Psi_k[A_k - A^*_{kr}, B^*_{kr}; A^*_{kr}, B_k - B^*_{kr}]$$

läßt sich nun aber nach (5) aus ebendenselben Summanden additiv zusammensetzen, nur tritt für ungerades r ein Zeichenwechsel ein; es gilt also die Gleichung

$$(6)\qquad \Psi_k[A_k - A^*_{kr}, B^*_{kr}; A^*_{kr}, B_k - B^*_{kr}] = (-1)^r \Psi_k[A_k; B_k],$$

und speziell

$$(6a)\qquad \Psi_k[B_k; A_k] = (-1)^k \Psi_k[A_k; B_k].$$

Aus der additiven Grundeigenschaft (1) von Ψ_k folgt also von selbst der vektorielle Charakter von Ψ_k.

Setzt man schließlich in (1) für x_ν den Wert a_ν, so erhält man

$$\Psi_k[A_k; B_k] - \Psi_k[A_k; a_\nu, B_k - b_\nu] = \Psi_k[A_k; B_k],$$

woraus sich

$$(7)\qquad \Psi_k[A_k; a_\nu, B_k - b_\nu] = 0$$

ergibt; der Wert einer additiven Intervallfunktion, genommen über ein degeneriertes Intervall, ist also stets Null. Es ist daher berechtigt, sie eine k-dimensionale Intervallfunktion zu nennen.

Nun seien von jeder Veränderlichen x_ν je $n_\nu + 1$ Werte $x_\nu^{(0)}, x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n_\nu)}$ gegeben, wobei $x_\nu^{(0)} = a_\nu$ und $x_\nu^{(n_\nu)} = b_\nu$ sei. Dann behaupten wir die Richtigkeit der Gleichung

$$(8)\qquad \sum_{\varrho_k=0}^{n_k-1} \cdots \sum_{\varrho_2=0}^{n_2-1} \sum_{\varrho_1=0}^{n_1-1} \Psi_k[x_1^{(\varrho_1)}, x_2^{(\varrho_2)}, \ldots, x_k^{(\varrho_k)}; \; x_1^{(\varrho_1+1)}, x_2^{(\varrho_2+1)}, \ldots, x_k^{(\varrho_k+1)}] = \Psi_k[A_k; B_k],$$

die wir durch zwei Induktionsschlüsse beweisen:

1. Es sei $n_\nu = 1$ für $\nu \geqq 2$.

In diesem Falle ist (8) für $n_1 = 2$ wegen (1a) richtig. Nun sei $n_1 > 2$ und (8) für $\bar{n}_1 = n_1 - 1$ richtig, es sei also

$$(9)\qquad \sum_{\varrho_1=0}^{\bar{n}_1-1} \Psi_k[x_1^{(\varrho_1)}, A_k - a_1; \; x_1^{(\varrho_1+1)}, B_k - b_1] = \Psi_k[A_k; B_k],$$

wobei $x_1^{(\bar{n}_1)} = b_1$ ist. Mit Hilfe eines weiteren Wertes $\bar{x}_1$ von x_1 kann man den letzten

Summanden in (9) nach (1a) zerlegen; man erhält dadurch

$$(10)\quad \sum_{\varrho_1=0}^{\bar{n}_1-2} \Psi_k[x_1^{(\varrho_1)}, A_k - a_1;\ x_1^{(\varrho_1+1)}, B_k - b_1] + \Psi_k[x_1^{(\bar{n}_1-1)}, A_k - a_1;\ \bar{x}_1, B_k - b_1] + \Psi_k[\bar{x}_1, A_k - a_1;\ x_1^{(\bar{n}_1)}, B_k - b_1] = \Psi_k[A_k; B_k].$$

Wechselt man jetzt die Bezeichnungen, indem man $x_1^{(n_1-1)}$ statt $\bar{x}_1$ und $x_1^{(n_1)}$ statt $x_1^{(\bar{n}_1)} = b_1$ schreibt, so läßt sich (10) zusammenfassen zu

$$(11)\quad \sum_{\varrho_1=0}^{n_1-1} \Psi_k[x_1^{(\varrho_1)}, A_k - a_1;\ x_1^{(\varrho_1+1)}, B_k - b_1] = \Psi_k[A_k; B_k],$$

womit (8) für unseren Spezialfall bewiesen ist.

2. Nun sei $n_\nu \geqq 1$ für alle Werte von ν, und die Richtigkeit von (8) sei nachgewiesen unter der Bedingung $n_k = 1$; es sei also

$$(12)\quad \sum_{\varrho_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \cdots \sum_{\varrho_2=0}^{n_2-1} \sum_{\varrho_1=0}^{n_1-1} \Psi_k[x_1^{(\varrho_1)}, x_2^{(\varrho_2)}, \ldots, x_{k-1}^{(\varrho_{k-1})}, a_k;\ x_1^{(\varrho_1+1)}, x_2^{(\varrho_2+1)}, \ldots x_{k-1}^{(\varrho_{k-1}+1)}, b_k] = \Psi_k[A_k; B_k].$$

Jeder Summand von (12) läßt sich unter Anwendung des Wertsystems der x_k gemäß (11) zerlegen; das Ergebnis dieser Zerlegung ist dann mit (8) identisch, womit alles bewiesen ist.

Hier tritt der Unterschied zwischen unserer additiven vektoriellen Intervallfunktion und einer additiven Mengenfunktion scharf zutage: während für eine additive Mengenfunktion die Gleichung (8) dann und nur dann gilt, wenn die Werte $x_\nu^{(0)}, x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n_\nu)}$ monoton geordnet sind, behält sie für unsere Intervallfunktion ihre Gültigkeit bei ganz beliebiger Anordnung dieser Werte. Übrigens werden wir, wenn eine solche monotone Anordnung für jedes ν vorliegt, von einer „Gitterzerlegung" des Intervalles $[A_k; B_k]$ sprechen.

§ 3. Die Δ_k-Funktion.

Ist $f(X_k)$ eine Punktfunktion des Veränderlichenkomplexes X_k, so läßt sich ihr zuordnen die Intervallfunktion

$$(13)\quad \Delta_k f[A_k; B_k] = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r f(A_{kr}, B_k - B_{kr});$$

die Summe rechts wird aus den Werten von f in den 2^k Eckpunkten von $[A_k; B_k]$ gebildet, welche das positive oder negative Vorzeichen erhalten, je nachdem der Eckpunkt vom Endpunkte B_k aus über eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Kanten erreicht wird (wobei im Falle degenerierter Intervalle die „uneigentlichen" Kanten von der Länge Null mitgerechnet werden müssen).

Wir weisen zunächst nach, daß $\Delta_k f$ eine additive Intervallfunktion ist. Bezeichnen wir den Komplex $X_k - x_\nu$ mit X_h, so können wir (13) zerlegen in

$$(14)\quad \Delta_k f[A_k; B_k] = \sum_{r=0}^{h} (-1)^r f(A_{hr}, b_\nu, B_k - B_{kr}) - \sum_{r=0}^{h} (-1)^r f(A_{hr}, a_\nu, B_k - B_{kr}) = \Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid b_\nu] - \Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid a_\nu].$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} &\Delta_k f[A_k - a_\nu, x_\nu; B_k] - \Delta_k f[A_k - a_\nu, x_\nu; a_\nu, B_k - b_\nu] \\ &= \Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid b_\nu] - \Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid x_\nu] \\ &- \Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid a_\nu] + \Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid x_\nu] \\ &= \Delta_k f[A_k; B_k]. \end{aligned}$$

Damit ist die Additivitätsbedingung (1) für $\Delta_k f$ nachgewiesen.

Faßt man $\Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid x_\nu]$ als Punktfunktion der einen Veränderlichen x_ν auf, so läßt sich (14) schreiben in der Form

$$\Delta_k f[A_k; B_k] = \Delta_1(\Delta_{k-1} f[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu \mid x_\nu])\,[a_\nu; b_\nu]. \tag{15}$$

Die in (15) erhaltene Aufspaltung der höher als eindimensionalen Δ-Funktionen läßt sich fortsetzen, wodurch man erhält

$$\begin{aligned}\Delta_k f[A_k; B_k] = \Delta_1(\Delta_1(\ldots \Delta_1(\Delta_1 f[a_1; b_1 \mid X_k - x_1])\,[a_2; b_2 \mid X_k - x_1 - x_2]\ldots)\\ [a_{k-1}; b_{k-1} \mid x_k])\,[a_k; b_k];\end{aligned} \tag{16}$$

die Reihenfolge der x_ν kann in (16) beliebig genommen werden.

Da man umgekehrt nach eben der Beziehung (16) jede Aufeinanderfolge von r eindimensionalen Δ_1-Bildungen durch eine r-dimensionale Δ_r-Funktion ersetzen kann, so läßt sich (16) auch verwandeln in

$$\begin{aligned}&\Delta_k f[A_k; B_k] =\\ &\Delta r_n(\Delta r_{n-1}(\ldots \Delta r_2(\Delta r_1 f[A^*_{kr_1}; B^*_{kr_1} \mid X_k - X^*_{kr_1}])\,[A^*_{kr_2}; B^*_{kr_2} \mid X_k - X^*_{kr_1} - X^*_{kr_2}]\ldots)\\ &\qquad [A^*_{kr_{n-1}}; B^*_{kr_{n-1}} \mid X^*_{kr_n}])\,[A^*_{kr_n}; B^*_{kr_n}],\end{aligned} \tag{17}$$

wobei der Komplex $\sum_{\nu=1}^{n} X^*_{kr_\nu}$ mit X_k identisch, also $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu = k$ ist.

Zum Schlusse noch eine besonders wichtige Relation:

$$f(B_k) - f(A_k) = \sum_{r=0}^{k-1} \Delta_{k-r} f[A_k - A^*_{kr}; B_k - B^*_{kr} \mid A^*_{kr}], \tag{18}$$

von deren Richtigkeit man sich am einfachsten folgendermaßen überzeugt: löst man die $2^k - 1$ in (18) vorkommenden Δ-Funktionen nach (13) in Summanden auf, so findet man

a) der Summand $f(B_k)$ tritt rechter Hand nur einmal auf, hat also den Koeffizienten 1;

b) der Koeffizient von $f(A_k - A^*_{kr}, B^*_{kr})$ ist $\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} = (1-1)^r = 0$ für $1 \leqq r \leqq k-1$;

c) der Koeffizient von $f(A_k)$ ist $\sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} = (1-1)^k - 1 = -1$.

Damit ist alles bewiesen. Aus (18) erhält man noch

$$f(B_k) - f(A_k) = -(f(A_k) - f(B_k)) = -\sum_{r=0}^{k-1} \Delta_{k-r} f[B_k - B^*_{kr}; A_k - A^*_{kr} \mid B^*_{kr}], \tag{19}$$

eine ebenso wichtige Beziehung.

Daß schließlich noch die additive Zerlegung

$$\Delta_k \sum_{\varrho=1}^{n} f_\varrho[A_k; B_k] = \sum_{\varrho=1}^{n} \Delta_k f_\varrho[A_k; B_k] \tag{20}$$

gilt, ist so trivial, daß ihr Beweis sich erübrigt.

§ 4. Die Orientierung der Intervalle.

Wir führen die Punktfunktion $\psi_k(X_k) = \prod_{\nu=1}^{k} x_\nu$ ein. Dann ist

$$\Delta_k \psi_k[A_k; B_k] = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \psi_r(A^*_{kr})\,\psi_{k-r}(B_k - B^*_{kr}) = \prod_{\nu=1}^{k} (b_\nu - a_\nu). \tag{21}$$

Es ist also $\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]$ der mit einem Vorzeichen versehene Inhalt des Intervalles $[A_k; B_k]$, und zwar ist das Vorzeichen positiv oder negativ, je nachdem die Beziehung $b_\nu < a_\nu$ für eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Werten ν gilt. Alle Intervalle zerfallen demnach in zwei Gruppen: in positiv orientierte und in negativ orientierte Intervalle; es hat also einen Sinn, von „gleich“ und „entgegengesetzt“ orientierten Intervallen zu sprechen.

Der orientierte Inhalt eines r-dimensionalen Intervalles im k-dimensionalen Raume wird entsprechend durch das Symbol $\Delta_r \psi_r[A^*_{kr}; B^*_{kr} \mid P_k - P^*_{kr}]$ wiedergegeben.

„Vollständig positiv orientiert" werden wir ein Intervall nennen, welches die Bedingung $b_\nu > a_\nu$ für alle Werte von ν erfüllt. Ein solches hat die Eigenschaft, daß auch alle seine in A_k beginnenden Oberflächenintervalle $[A^*_{kr}; B^*_{kr} \mid A_k - A^*_{kr}]$ vollständig positiv orientiert sind.

§ 5. Stetigkeitssätze.

Wir nennen eine Funktion $f(X_k)$ in A_k dann „Δ_r-stetig nach dem Komplex X^*_{kr}", wenn $\lim\limits_{X^*_{kr} \to A^*_{kr}} \Delta_r f[A^*_{kr}; X^*_{kr} | A_k - A^*_{kr}] = 0$ ist, wobei $\lim\limits_{X^*_{kr} \to A^*_{kr}}$ den r-dimensionalen Grenzübergang bedeutet, bei welchem die Variabeln x_ϱ des Komplexes X^*_{kr} unabhängig voneinander dem Werte a_ϱ zustreben. Die Bedingung für diese Δ_r-Stetigkeit lautet also

$$|\Delta_r f[A^*_{kr}; X^*_{kr} \mid A_k - A^*_{kr}]| < \varepsilon\,, \tag{22}$$

wenn $|x_\varrho - a_\varrho| < \delta(\varepsilon)$ für jedes x_ϱ von X^*_{kr} gilt, was wir abgekürzt schreiben

$$|X^*_{kr} - A^*_{kr}| < \delta(\varepsilon)\,. \tag{22a}$$

Für die Δ-Stetigkeit gelten zwei Sätze, welche zwei bekannten Sätzen über die Stetigkeit analog sind:

Satz 1. „Für die Δ_k-Stetigkeit von $f(X_k)$ in A_k ist notwendig und hinreichend, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sich eine Umgebung $|X_k - A_k| < \delta(\varepsilon)$ von A_k finden läßt von der Art, daß für jedes Punktepaar X_k und $\bar{X}_k$ dieser Umgebung die Ungleichung $|\Delta_k f[X_k; \bar{X}_k]| < \varepsilon$ gilt."

1. Aus der Δ_k-Stetigkeit von f folgt in einer Umgebung $|X_k - A_k| < \delta(\varepsilon)$ von A_k die Abschätzung $|\Delta_k f[A_k; X_k]| < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Nach (5) ist dann

$$|\Delta_k f[X_k; \bar{X}_k]| \leqq \sum_{r=1}^{k} |\Delta_k f[A_k;\ X^*_{kr},\ \bar{X}_k - \bar{X}^*_{kr}]| < \varepsilon.$$

2. Es sei $|\Delta_k f[X_k; \bar{X}_k]| < \varepsilon$ für $|X_k - A_k| < \delta$ und $|\bar{X}_k - A_k| < \delta$. Mit $X_k = A_k$ ist also (22) erfüllt.

Satz 2 (*von der gleichmäßigen Δ-Stetigkeit*). „Ist $f(X_k)$ in jedem Punkte des (nach Definition abgeschlossenen) Intervalles $[A_k; B_k]$ Δ_k-stetig, so gibt es bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß für jedes Teilintervall $[X_k; \bar{X}_k]$ von $[A_k; B_k]$, dessen Kantenlängen kleiner als $\delta(\varepsilon)$ sind, die Abschätzung $|\Delta_k f[X_k; \bar{X}_k]| < \varepsilon$ gilt".

Wir nehmen an, der Satz träfe für eine Funktion $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ nicht zu. Durch Halbieren aller Kanten, wodurch $[A_k; B_k]$ in 2^k abgeschlossene gleich große Teilintervalle zerlegt wird, und Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man in $[A_k; B_k]$ dann mindestens einen Punkt P_k, für den in jeder noch so kleinen Umgebung die Ungleichung $|\Delta_k f[X_k; \bar{X}_k]| \geqq \varepsilon$ vorkommt. Nach Satz 1 wäre also f in P_k nicht Δ_k-stetig, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Δ-Stetigkeit enthalten zwei weitere Sätze:

Satz 3. „Für die Stetigkeit von $f(X_k)$ in A_k ist notwendig und hinreichend, daß f in diesem Punkte Δ_r-stetig nach allen $2^k - 1$ Komplexen X_{kr} sei $(1 \leqq r \leqq k)$".

1. Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ folgt aus der Stetigkeit von f in A_k die Abschätzung $|f(X_k) - f(\bar{X}_k)| < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$, wenn $|X_k - A_k| < \delta(\varepsilon)$ und $|\bar{X}_k - A_k| < \delta(\varepsilon)$ ist.

Nach (13) ist aber $\Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*]$ eine Summe von 2^{r-1} solchen Differenzen, also

$$|\Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*]| < \frac{\varepsilon}{2^{k-r}} \leqq \varepsilon .$$

2. Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ folgt aus der Δ_r-Stetigkeit von f in A_k für alle Komplexe X_{kr} gleichmäßig $|\Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*]| < \frac{\varepsilon}{2^k}$, wenn $|X_k - A_k| < \delta(\varepsilon)$ ist. Im Verein mit (18) ergibt dies $|f(X_k) - f(A_k)| < \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < \varepsilon$ für $|X_k - A_k| < \delta$, womit alles bewiesen ist.

Satz 4. „Für die Δ_k-Stetigkeit einer Funktion $f(X_k)$ in A_k ist notwendig und hinreichend, daß f sich darstellen läßt als Summe einer in A_k stetigen Funktion $g(X_k)$ und k solcher Funktionen $g_\nu(X_k)$, die in einer Umgebung von A_k nach je einer Veränderlichen partiell konstant, also von der Form $g_\nu(X_k - x_\nu)$ sind".

1. Nach (18) ist $f(X_k) = f(A_k) + \Delta_k f[A_k; X_k] + \sum_{r=1}^{k-1} \Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*]$. Da $\lim_{X_k \to A_k} \Delta_k f[A_k; X_k] = 0$ ist, so ist $g(X_k) = f(A_k) + \Delta_k f[A_k; X_k]$ in A_k stetig. Jede der $2^k - 2$ Funktionen unter dem Summenzeichen ist nach mindestens einer Veränderlichen partiell konstant, die Summe läßt sich also zu $\sum_{\nu=1}^{k} g_\nu(X_k - x_\nu)$ zusammenfassen.

2. Innerhalb einer gewissen Umgebung von A_k sei $f(X_k) = g(X_k) + \sum_{\nu=1}^{k} g_\nu(X_k - x_\nu)$, wobei $g(X_k)$ stetig sei. Nach (20) ist $\Delta_k f[A_k; X_k] = \Delta_k g[A_k; X_k] + \sum_{\nu=1}^{k} \Delta_k g_\nu[A_k; X_k]$, nach (14) also $\Delta_k f[A_k; X_k] = \Delta_k g[A_k; X_k]$. Nach Satz 3 ist aber $\lim_{X_k \to A_k} \Delta_k g[A_k; X_k] = 0$, also auch $\lim_{X_k \to A_k} \Delta_k f[A_k; X_k] = 0$.

§ 6. Mehrdimensionale und totale Differenzierbarkeit.

Wir betrachten eine skalare Intervallfunktion, nämlich den Quotienten $\frac{\Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*]}{\Delta_r \psi_r[A_{kr}^*; X_{kr}^*]}$, dessen Vorzeichen bei positiver Orientierung des Intervalles mit dem des Zählers übereinstimmt, bei negativer diesem entgegengesetzt ist, und untersuchen den r-dimensionalen Grenzübergang $\lim_{X_{kr}^* \to A_{kr}^*} \frac{\Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*]}{\Delta_r \psi_r[A_{kr}^*; X_{kr}^*]}$, bei welchem alle vorkommenden x_ϱ unabhängig voneinander nach a_ϱ streben, ohne diesen Wert je anzunehmen. Existiert ein eindeutiger Grenzwert, so nennen wir f in A_k nach X_{kr}^* „*r-dimensional differenzierbar*", den Grenzwert selbst aber[8]) die „*r-dimensionale Ableitung*" von f nach X_{kr}^* in A_k, und schreiben diesen Grenzwert $DX_{kr}^* f(A_k)$. Existiert ein oberer und ein unterer Grenzwert, so hat f daselbst eine endliche r-dimensionale *obere* Ableitung $\overline{DX_{kr}^*} f(A_k)$ und eine ebensolche *untere* $\underline{DX_{kr}^*} f(A_k)$. Im Falle der Existenz der Ableitung ist also

$$\left| \frac{\Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*]}{\Delta_r \psi_r[A_{kr}^*; X_{kr}^*]} - DX_{kr}^* f(A_k) \right| < \varepsilon , \tag{23}$$

[8]) Für $k = 1$ und $r = 1$ stimmen diese Begriffe mit dem üblichen Begriff der Ableitung überein, für $k \geqq 2$ und $r = 1$ mit dem der partiellen Ableitung.

im Falle der Existenz einer endlichen oberen und unteren Ableitung aber

$$(23\,a)\quad \underline{DX^*_{kr}}\, f(A_k) - \varepsilon < \frac{\Delta_r f[A^*_{kr};\, X^*_{kr} \mid A_k - A^*_{kr}]}{\Delta_r\, \psi_r[A^*_{kr};\, X^*_{kr}]} < \overline{DX^*_{kr}}\, f(A_k) + \varepsilon, \quad \text{wenn}$$

$$(23\,b)\qquad 0 < |X^*_{kr} - A^*_{kr}| < \delta(\varepsilon) \quad \text{ist.}$$

Der üblichen Unterscheidung zwischen „rechter“ und „linker“ Ableitung entspricht hier eine Unterscheidung von 2^r Ableitungen, indem man jede einzelne Veränderliche des Komplexes X^*_{kr} sich jedesmal ihrem Grenzwert nur von einer Seite nähern läßt. Die eine Hälfte dieser 2^r Ableitungen wird dabei über positiv, die andere über negativ orientierte Intervalle $[A^*_{kr};\, X^*_{kr} \mid A_k - A^*_{kr}]$ gebildet. Aus (23) ergibt sich hierzu

Satz 5. „Ist $f(X_k)$ in A_k nach X^*_{kr} r-dimensional differenzierbar und $DX^*_{kr} f(A_k)$ von Null verschieden, so besitzt $\Delta_r f[A^*_{kr};\, X^*_{kr} \mid A_k - A^*_{kr}]$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von A_k dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie $DX^*_{kr} f(A_k)$, je nachdem das Intervall $[A^*_{kr};\, X^*_{kr}]$ positiv oder negativ orientiert ist“.

Wir wollen nun eine Funktion $f(X_k)$, welche in A_k nach jedem Komplex X_{kr} r-dimensional differenzierbar ist ($r = 1, 2, \ldots k$), in diesem Punkte „*total mehrdimensional differenzierbar*“ nennen. Eine solche Funktion besitzt, wie wir sogleich beweisen werden, in A_k ein Stolzsches totales Differential. Diese Behauptung steckt nämlich in dem noch weiter gehenden

Satz 6. „Für das Vorhandensein des totalen Differentiales von $f(X_k)$ in A_k ist hinreichend die Existenz aller k eindimensionalen Ableitungen und die Endlichkeit aller mehrdimensionalen oberen und unteren Ableitungen von f in A_k“.

Beweis: Für $r = 1$ gelten k Beziehungen von der Form (23); diese verwandeln wir unter Benutzung von (21) in

$$(24)\qquad |\Delta_1 f[a_\nu;\, x_\nu \mid A_k - a_\nu] - (x_\nu - a_\nu)\, Dx_\nu f(A_k)| \leqq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} |\Delta_1 \psi_1[a_\nu;\, x_\nu]|, \quad \text{wenn}$$

$$(24\,a)\qquad 0 \leqq |x_\nu - a_\nu| < \delta_1(\varepsilon)$$

ist. Die Gleichheitszeichen sind dadurch gerechtfertigt, daß nach der Umformung der Fall $x_\nu = a_\nu$, in welchem sämtliche auftretenden Δ-Funktionen gleich Null sind, zulässig ist. Ebenso formen wir die für $r \geqq 2$ geltenden Beziehungen (23 a) um; diese ergeben, wenn wir noch den größten absoluten Betrag aller $\overline{DX_{kr}} f(A_k)$ und $\underline{DX_{kr}} f(A_k)$ mit c bezeichnen, die Abschätzung

$$(25)\qquad |\Delta_r f[A^*_{kr};\, X^*_{kr} \mid A_k - A^*_{kr}]| \leqq |\Delta_r \psi_r[A^*_{kr};\, X^*_{kr}]| \left(c + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) \text{ für } r \geqq 2, \quad \text{wenn}$$

$$(25\,a)\qquad 0 \leqq |X_k - A_k| < \delta_2(\varepsilon)$$

ist. Wir können nun die Bedingungen (24 a) und (25 a) ersetzen durch eine einzige:

$$(26)\qquad 0 \leqq \lambda = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{k} (x_\nu - a_\nu)^2} < \delta(\varepsilon).$$

Summiert man nun alle $2^k - 1$ in (24) und (25) enthaltenen Ungleichungen und verwendet dabei (18), so erhält man

$$(27)\quad |f(X_k) - f(A_k) - \sum_{\nu=1}^{k} (x_\nu - a_\nu)\, Dx_\nu f(A_k)| \leqq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^{k} |\Delta_r \psi_r[A_{kr};\, X_{kr}]| + c \sum_{r=2}^{k} |\Delta_r \psi_r[A_{kr};\, X_{kr}]|.$$

Im Einklang mit (26) können wir $\lambda < 1$ wählen, dann gilt für $n > 1$ die Abschätzung $\lambda^n \leqq \lambda$, und da außerdem $0 \leqq |x_\nu - a_\nu| \leqq \lambda$ ist, so erhält man, wieder unter Verwendung von (21), die Abschätzung

$$(27\,a) \qquad |f(X_k) - f(A_k) - \sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu - a_\nu)\, Dx_\nu f(A_k)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\,\lambda + 2^k c\,\lambda^2.$$

Wählt man schließlich noch $\lambda < 1$ so, daß es außer der Bedingung (26) noch der Bedingung $\lambda < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}c}$ genügt, so geht (27 a) über in

$$(27\,b) \qquad |f(X_k) - f(A_k) - \sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu - a_\nu)\, Dx_\nu f(A_k)| \leqq \lambda\,\varepsilon.$$

Dies ist aber die Bedingung für die Existenz des totalen Differentiales.

Die aufgestellte Bedingung ist aber keineswegs notwendig, wie das Beispiel $f(x_1, x_2) = |x_1 x_2|^{\frac{3}{4}}$ erhellt. Hier ist $Dx_1 f(0,0) = Dx_2 f(0,0) = 0$, aber $\overline{D(x_1, x_2)} f(0,0) = +\infty$ und $\underline{D(x_1, x_2)} f(0,0) = -\infty$. Trotzdem ist $|x_1 x_2|^{\frac{3}{4}} < \varepsilon \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, wenn $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon^2$ ist, also für $(0,0)$ ein totales Differential vorhanden.

§ 7. Stetigkeit und Δ-Stetigkeit mehrdimensional differenzierbarer Funktionen.

Da ψ_r stetig, sowie auch Δ_r-stetig nach X_{kr}^* ist, ergibt sich aus (23 a), daß eine Funktion, welche in A_k eine endliche obere und eine endliche untere r-dimensionale Ableitung nach X_{kr}^* besitzt, in A_k auch Δ_r-stetig nach X_{kr}^* ist. Hieraus und aus Satz 3 folgt dann unmittelbar

Satz 7. „Eine Funktion $f(X_k)$, deren sämtliche ein- und mehrdimensionalen oberen und unteren Ableitungen im Punkte A_k endlich sind (also insbesondere jede total mehrdimensional differenzierbare Funktion) ist in A_k stetig".

Mit der Δ_r-Stetigkeit einer r-dimensional nach X_{kr}^* differenzierbaren Funktion hat es nun noch eine besondere Bewandtnis. Für die Funktion $\psi_r(X_{kr}^*)$ gilt nämlich (wie für alle überall stetigen Funktionen) die Gleichung $\lim\limits_{x_\varrho \to a_\varrho} \Delta_r \psi_r[A_{kr}^*; X_{kr}^*] = 0$ schon dann, wenn nur eine einzige Veränderliche x_ϱ von X_{kr} dem Werte a_ϱ zustrebt. Dies wird im allgemeinen bei solchen Funktionen, die in A_k nach X_{kr}^* Δ_r-stetig sind, nicht zutreffen. Wohl aber ergibt sich aus (23 a) und der eben über ψ_r gemachten Bemerkung, daß es für eine in A_k mit endlicher oberer und unterer r-dimensionaler Ableitung nach X_{kr}^* versehene Funktion $f(X_k)$ eine Umgebung (23 b) gibt, innerhalb deren ebenfalls

$$(28) \qquad \lim_{x_\varrho \to a_\varrho} \Delta_r f[A_{kr}^*; X_{kr}^* | A_k - A_{kr}^*] = 0$$

gilt. Diese Bemerkung läßt sich verdichten zu einem Satze, der für alles Weitere besonders wichtig sein wird, nämlich

Satz 8. „Es sei $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ definiert und in allen Punkten des festen $(k-1)$-dimensionalen Schnittes $[A_k - a_\nu; B_k - b_\nu | \bar{x}_\nu]$ nach X_k k-dimensional differenzierbar; außerdem sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß für zwei Punkte P_k und Q_k, deren Koordinaten mit dem Index ν den Bedingungen $|p_\nu - \bar{x}_\nu| < \delta$ und $|q_\nu - \bar{x}_\nu| < \delta$ genügen, stets die Ungleichung $|\Delta_k f[P_k; Q_k]| < \varepsilon$ erfüllt ist". (Wesentlich ist dabei, daß über die $k-1$ anderen Koordinaten von P_k und Q_k überhaupt nichts vorausgesetzt wird.)

Im folgenden Beweis ist der Komplex $X_k - x_\nu$ durchgängig mit X_{k-1} bezeichnet. Nun sei η irgendeine positive Zahl. Dann besitzt jeder Punkt $(X'_{k-1}, \bar{x}_\nu)$ des Schnittes analog (24) eine abgeschlossene Umgebung

(29 a) $0 \leqq |X_{k-1} - X'_{k-1}| \leqq \zeta(X'_{k-1})$, (29 b) $0 \leqq |x_\nu - \bar{x}_\nu| \leqq \zeta(X'_{k-1})$,

für deren Punkte X_k die Ungleichung

(30) $|\Delta_k f[X'_{k-1}, \bar{x}_\nu; X_k]| \leqq |x_\nu - \bar{x}_\nu| \cdot |\Delta_{k-1}\psi_{k-1}[X'_{k-1}; X_{k-1}]| \cdot (\eta + |DX_k f(X'_{k-1}, \bar{x}_\nu)|)$

oder

(30 a) $|\Delta_k f[X'_{k-1}, \bar{x}_\nu; X_k]| \leqq |x_\nu - \bar{x}_\nu| \cdot |\Delta_{k-1}\psi_{k-1}[X'_{k-1}; X_{k-1}]| \cdot \mu(X'_{k-1})$

erfüllt ist, wobei $|DX_k f(X'_{k-1}, \bar{x}_\nu)| + \eta = \mu(X'_{k-1})$ gesetzt ist. Stets ist $\mu > 0$.

Nach dem Heine-Borelschen Satze wählen wir nun n solche Intervalle (29) aus, welche den Schnitt $[A_{k-1}; B_{k-1} | \bar{x}_\nu]$ vollständig einschließen; es seien dies die Intervalle

(31) $0 \leqq |X_{k-1} - X^{(\varrho)}_{k-1}| \leqq \zeta(X^{(\varrho)}_{k-1})$, $0 \leqq |x_\nu - \bar{x}_\nu| \leqq \zeta(X^{(\varrho)}_{k-1})$, wobei $1 \leqq \varrho \leqq n$ ist.

Unter den n Werten $\zeta(X^{(\varrho)}_{k-1})$ befindet sich mindestens ein kleinster, den wir mit $\zeta_{\min}$ bezeichnen; dann gelten die Ungleichungen (30) auch in den n Intervallen

(32) $$0 \leqq |X_{k-1} - X^{(\varrho)}_{k-1}| \leqq \zeta(X^{(\varrho)}_{k-1}), \qquad 0 \leqq |x_\nu - \bar{x}_\nu| \leqq \zeta_{\min}.$$

Bezeichnet man noch den größten der n Werte $\zeta(X^{(\varrho)}_{k-1})$ mit $\zeta_{\max}$ und den größten der n Werte $\mu(X^{(\varrho)}_{k-1})$ mit $\mu_{\max}$, so gilt in allen n Intervallen (32) gleichmäßig

(33) $$|\Delta_k f[X^{(\varrho)}_{k-1}, \bar{x}_\nu; X_k]| \leqq |x_\nu - \bar{x}_\nu| \, \mu_{\max} \, \zeta^{k-1}_{\max} = |x_\nu - \bar{x}_\nu| \, c,$$

wobei c eine Konstante ist.

Es sei jetzt $[U_k; V_k]$ ein Teilintervall eines der Intervalle (32), etwa desjenigen mit dem Index ϱ. Aus (5) und (33) ergibt sich dann

(34) $$|\Delta_k f[U_k; V_k]| \leqq \sum_{r=0}^{k} |\Delta_k f[X^{(\varrho)}_{k-1}, \bar{x}_\nu; U_{kr}, V_k - V_{kr}]|$$
$$\leqq 2^k \, c \, \mathrm{Max}\,(|u_\nu - \bar{x}_\nu|, |v_\nu - \bar{x}_\nu|).$$

Nunmehr zerlegen wir das Intervall

(35) $$[A_{k-1}, \bar{x}_\nu - \zeta_{\min}; B_{k-1}, \bar{x}_\nu + \zeta_{\min}],$$

indem wir für jede Veränderliche x_λ des Komplexes X_{k-1} die $2n$ Werte $x^{(\varrho)}_\lambda + \zeta(X^{(\varrho)}_{k-1})$ und $x^{(\varrho)}_\lambda - \zeta(X^{(\varrho)}_{k-1})$ einschalten (die natürlich teilweise übereinstimmen können), wodurch wir eine Gitterzerlegung von (35) erhalten. Dieses Gitter enthält dann höchstens $(2n-1)^{k-1}$ Teilintervalle. Fügt man nun noch zwei beliebige Punkte P_k und Q_k des Intervalles (35) hinzu, so erhöhen deren Koordinaten die Anzahl der Gitterteile von (35) auf höchstens $3(2n+1)^{k-1}$, während die Anzahl der Gitterteile des Intervalles $[P_k; Q_k]$ selbst höchstens $(2n-1)^{k-1}$ beträgt. Für jeden einzelnen Gitterteil gilt aber, da er Teilintervall eines der Intervalle (32) ist, die Abschätzung (34), so daß für $[P_k; Q_k]$ sich nach (8) ergibt

(36) $$|\Delta_k f[P_k; Q_k]| \leqq 2^{2k-1} \, n^k \, c \, \mathrm{Max}\,(|p_\nu - \bar{x}_\nu|, |q_\nu - \bar{x}_\nu|).$$

Wählt man schließlich jetzt sowohl $|p_\nu - \bar{x}_\nu|$ als auch $|q_\nu - \bar{x}_\nu|$ kleiner als $\dfrac{\varepsilon}{2^{2k-1} \, n^k \, c} = \beta(\varepsilon)$, so geht (36) über in

(36 a) $$|\Delta_k f[P_k; Q_k]| < \varepsilon;$$

mit $\delta = \mathrm{Min}\,(\zeta_{\min}, \beta(\varepsilon))$ ist also der Satz bewiesen.

Aus Satz 8 folgen mehrere andere Sätze:

Satz 9. „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar; außerdem sei P_k ein fester Punkt von $[A_k; B_k]$. Dann ist $\chi(X_k) = \Delta_k f[P_k; X_k]$ eine in $[A_k; B_k]$ stetige Funktion".

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\bar{X}_k$ ein beliebiger Punkt von $[A_k; B_k]$. Nach Satz 8 gibt es dann ein $\delta(\varepsilon)$ derart, daß

(37) $$|\Delta_k f[\bar{X}_k; X_k]| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

erfüllt ist, wenn wenigstens eine Veränderliche des Komplexes X_k der Bedingung

(37 a) $$|x_\nu - \bar{x}_\nu| < \delta(\varepsilon)$$

genügt. Nach (5) ist

(38) $$\Delta_k f[P_k; X_k] = (-1)^k \Delta_k f[\bar{X}_k; P_k] + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r \Delta_k f[\bar{X}_k; P_{kr}, X_k - X_{kr}],$$

was unter Benutzung von (6 a) übergeht in

(38 a) $$\Delta_k f[P_k; X_k] = \Delta_k f[P_k; \bar{X}_k] + \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \Delta_k f[\bar{X}_k; P_{kr}, X_k - X_{kr}] \text{ oder}$$

(38 b) $$\chi(X_k) - \chi(\bar{X}_k) = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \Delta_k f[\bar{X}_k; P_{kr}, X_k - X_{kr}].$$

Da die Endpunkte aller unter dem Summenvorzeichen vorkommenden Intervalle die Bedingung (37 a) erfüllen, gilt für jeden Summanden die Abschätzung (37), so daß nunmehr aus (38 b) sofort $|\chi(X_k) - \chi(\bar{X}_k)| < \varepsilon$ gefolgert werden kann, womit der Satz bewiesen ist.

Für die hier verwendete Funktion $\chi(X_k)$ gilt noch ein weiterer Satz, den wir aber in verallgemeinerter Form beweisen können:

Satz 10. „Es sei Ψ_k eine k-dimensionale additive Intervallfunktion, P_k ein fester Punkt und $[U_k; V_k]$ ein beliebiges Intervall. Für die Punktfunktion $\chi(X_k) = \Psi_k[P_k; X_k]$ gilt dann die Beziehung $\Delta_k \chi[U_k; V_k] = \Psi_k[U_k; V_k]$; es ist also $\Delta_k(\Psi_k[P_k; X_k])[U_k; V_k] = \Psi_k[U_k; V_k]$".

Aus (13), der Definition von $\chi(X_k)$ und (5) ergibt sich nämlich

$$\Delta_k \chi[U_k; V_k] = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \chi(U_{kr}, V_k - V_{kr}) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \Psi_k[P_k; U_{kr}, V_k - V_{kr}]$$
$$= \Psi_k[U_k; V_k].$$

Satz 11. „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar. Außerdem sei ein fester Punkt P_k in $[A_k; B_k]$ vorhanden, derart, daß $f(X_k)$ in jedem durch P_k gehenden r-dimensionalen Schnitt $[A_{kr}; B_{kr}|P_k - P_{kr}]$, für den $r \geqq 2$ ist, auch r-dimensional nach X_{kr} differenzierbar ist. Ist schließlich f auf jeder durch P_k gehenden Achsenparallelen $[a_\nu; b_\nu | P_k - p_\nu]$ nach x_ν wenigstens stetig, so ist f überall in $[A_k; B_k]$ stetig".

Beweis: Nach (18) ist $f(X_k) = f(P_k) + \sum_{r=0}^{k-1} \Delta_{k-r} f[P_k - P_{kr}; X_k - X_{kr} | P_{kr}]$. Jeder Summand rechter Hand ist nach Satz 9 eine nach seinem Veränderlichenkomplex stetige Funktion, und da er nach dem komplementären Komplex konstant ist, ist er auch nach X_k stetig. $f(X_k)$ ist somit als Summe stetiger Funktionen selbst stetig.

Für die Stetigkeit einer Funktion $f(x_1, x_2)$ zweier Veränderlichen in der ganzen Ebene genügt also beispielsweise die zweidimensionale Differenzierbarkeit von f in der ganzen Ebene nebst partieller Stetigkeit nach x_1 längs der x_1-Achse und partieller Stetigkeit nach x_2 längs der x_2-Achse. Die zweidimensionale Differenzierbarkeit allein genügt nicht, wie das Beispiel $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ nachweist, wenn f_1 und f_2 überall unstetig sind. Es existiert nämlich überall $D(x_1, x_2) f = 0$, trotzdem ist f überall unstetig.

Bezeichnung: Ist ein Komplex H_k von k Konstanten $h_1, h_2, \ldots, h_k$ gegeben, so werde der Komplex $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_k + h_k)$ abgekürzt $(X + H)_k$ geschrieben, entsprechend der Komplex $(x_1 - h_1, x_2 - h_2, \ldots, x_k - h_k)$ abgekürzt $(X - H)_k$.

Satz 12. „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar; außerdem sei ein Komplex H_k von k Konstanten gegeben. Dann ist die Funktion $\varphi(X_k) = \Delta_k f[X_k; (X+H)_k]$ in ihrem Definitionsbereich stetig".

1. Ist eine der Konstanten h_ν Null, so ist nach (7) auch $\varphi(X_k) = 0$, also stetig.

2. Es seien alle h_ν von Null verschieden. Ist dann $\bar{X}_k$ ein beliebiger fester Punkt des Definitionsbereiches von φ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so liefert Satz 8 ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß für zwei Punkte P_k und Q_k die Abschätzung

$$|\Delta_k f[P_k; Q_k]| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \tag{39}$$

stets dann gilt, wenn eins ihrer gleichnamigen Koordinatenpaare p_ν und q_ν (und zwar gleichgültig welches) entweder die Ungleichungen

(39 a) $|p_\nu - \bar{x}_\nu| < \delta(\varepsilon)$ und $|q_\nu - \bar{x}_\nu| < \delta(\varepsilon)$ oder

(39 b) $|p_\nu - (\bar{x}_\nu + h_\nu)| < \delta(\varepsilon)$ und $|q_\nu - (\bar{x}_\nu + h_\nu)| < \delta(\varepsilon)$ erfüllt.

Für einen beliebigen Punkt X_k der Umgebung

$$|X_k - \bar{X}_k| < \delta \tag{40}$$

von $\bar{X}_k$ erhalten wir nun aus (5) die Beziehung

$$\varphi(X_k) = (-1)^k \Delta_k f[(\bar{X}+H)_k; X_k] + \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \Delta_k f[(\bar{X}+H)_k; X_{kr}, (X+H)_k - (X+H)_{kr}], \tag{41}$$

und ebenso

$$\varphi(\bar{X}_k) = \Delta_k f[X_k; (\bar{X}+H)_k] + \sum_{r=1}^{k} (-1)^r \Delta_k f[X_k; \bar{X}_{kr}, (\bar{X}+H)_k - (\bar{X}+H)_{kr}]. \tag{42}$$

Aus (41) und (42) folgt unter Benutzung von (6 a)

$$\varphi(X_k) - \varphi(\bar{X}_k) = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \Delta_k f[(\bar{X}+H)_k; X_{kr}, (X+H)_k - (X+H)_{kr}] - \sum_{r=1}^{k} (-1)^r \Delta_k f[X_k; \bar{X}_{kr}, (\bar{X}+H)_k - (\bar{X}+H)_{kr}]. \tag{43}$$

Alle Intervalle der ersten Summe erfüllen hierbei die Bedingung (39 b), die der zweiten aber (39 a), so daß für jeden der insgesamt $2^{k+1} - 2$ Summanden der rechten Seite die Abschätzung (39) gilt. Daraus folgt aber sofort $|\varphi(X_k) - \varphi(\bar{X}_k)| < \varepsilon \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}} < \varepsilon$ für alle Punkte X_k von (40), womit der Satz bewiesen ist.

§ 8. Erster Mittelwertsatz: der Mittelwert für $\Delta_k f[A_k; B_k]$.

Satz 13. (Mehrdimensionaler Rollescher Satz). „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar; außerdem sei $\Delta_k f[A_k; B_k] = 0$. Dann existiert im Inneren von $[A_k; B_k]$ ein Punkt P_k, für den $DX_k f(P_k) = 0$ gilt".

Zum Beweise betrachten wir die Funktion $\varphi(X_k) = \Delta_k f[X_k; (X+H)_k]$, wobei $h_\nu = \frac{b_\nu - a_\nu}{3}$ sei $(1 \leqq \nu \leqq k)$. Wäre diese Funktion in ihrem ganzen Definitionsbereich $[A_k; (B-H)_k]$ positiv, so wäre nach (8) auch $\Delta_k f[A_k; B_k]$ positiv, da das Intervall $[A_k; B_k]$ sich aus 3^k Intervallen von der Form $[X_k; (X+H)_k]$ gitterartig zusammensetzt. Weil sie ebensowenig überall negativ sein kann, so ist sie entweder überall Null, oder es gibt zwei Punkte ihres Definitionsbereiches, in denen sie verschiedenes Vorzeichen hat. Diese beiden Punkte lassen sich durch stetige Kurven verbinden, welche — abgesehen

von den Endpunkten selbst — ganz im Inneren des Definitionsbereiches verlaufen. Auf dem Inneren jeder solchen Kurve besitzt dann die Funktion φ wegen ihrer eigenen durch Satz 12 gewährleisteten Stetigkeit eine Nullstelle A_k'. Das Intervall $[A_k'; (A' + H)_k]$, das wir $[A_k'; B_k']$ schreiben wollen, ist also ein inneres Teilintervall von $[A_k; B_k]$, seine Kantenlängen sind gleich dem dritten Teil der entsprechenden von $[A_k; B_k]$, und es ist $\Delta_k f[A_k'; B_k'] = 0$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man eine Intervallschachtelung $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$, die nach einem im Inneren jedes $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ gelegenen Punkte P_k konvergiert; für jedes n gilt dabei $\Delta_k f[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}] = 0$. Nun existiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_k f[P_k; X_k^{(n)}]}{\Delta_k \psi_k[P_k; X_k^{(n)}]} = DX_k f(P_k), \tag{44}$$

wenn $X_k^{(n)}$ einen der 2^k Punkte $(A_{kr}^{(n)}, B_k - B_{kr}^{(n)})$ bedeutet.

Gibt es dann eine Teilfolge der linken Seite von (44), für welche stets $\Delta_k f[P_k; X_k^{(n)}] = 0$ ist, so folgt daraus sofort $DX_k f(P_k) = 0$.

Ist aber von einem bestimmten Wert von n an stets $\Delta_k f[P_k; X_k^{(n)}]$ von Null verschieden, so summieren wir nach (5)

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \Delta_k f[P_k; A_{kr}^{(n)}, B_k - B_{kr}^{(n)}] = \Delta_k f[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}] = 0. \tag{45}$$

Diese Gleichung ist unter der gemachten Annahme aber nur möglich, wenn entweder zwei der Summanden $\Delta_k f$ der linken Seite, die über gleich orientierte Intervalle gebildet sind, entgegengesetztes Vorzeichen, oder zwei Summanden, die über entgegengesetzt orientierte Intervalle gebildet sind, übereinstimmendes Vorzeichen haben. Beide Fälle sind nach Satz 5 mit der Existenz einer von Null verschiedenen Ableitung $DX_k f(P_k)$ unvereinbar, woraus sich $DX_k f(P_k) = 0$ ergibt.

Satz 14. (Allgemeiner erster Mittelwertsatz.) „In $[A_k; B_k)$ seien $f(X_k)$ und $g(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar. Dann gibt es im Inneren von $[A_k; B_k]$ einen Punkt P_k, für welchen die Gleichung

$$\Delta_k f[A_k; B_k] \cdot DX_k g(P_k) = \Delta_k g[A_k; B_k] \cdot DX_k f(P_k)$$

gilt."

1. Ist $\Delta_k g[A_k; B_k] = 0$, so liefert Satz 13 einen Punkt P_k, für welchen $DX_k g(P_k) = 0$ ist, woraus die Behauptung sofort folgt.

2. Ist $\Delta_k g[A_k; B_k]$ von Null verschieden, so setzen wir

$$f(X_k) - \frac{\Delta_k f[A_k; B_k]}{\Delta_k g[A_k; B_k]} g(X_k) = \varphi(X_k),$$

woraus sich nach (20) ergibt $\Delta_k \varphi[A_k; B_k] = 0$. Da außerdem φ überall in $[A_k; B_k]$ k-dimensinal nach X_k differenzierbar ist, so liefert Satz 13 einen Punkt P_k im Inneren von $[A_k; B_k]$, für welchen $DX_k \varphi(P_k) = DX_k f(P_k) - \frac{\Delta_k f[A_k; B_k]}{\Delta_k g[A_k; B_k]} DX_k g(P_k) = 0$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Wählt man in dem eben bewiesenen Satze $g(X_k) = \psi_k(X_k)$ und beachtet, daß $DX_k \psi_k = 1$ ist, so erhält man

Satz 14 a. (Spezieller erster Mittelwertsatz.) „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar. Dann gibt es im Inneren von $[A_k; B_k]$ einen Punkt P_k, in welchem $DX_k f(P_k) = \frac{\Delta_k f[A_k; B_k]}{\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]}$ ist."

Als Folgerung aus Satz 14 a ergibt sich

Satz 15. „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar; und zwar sei überall $DX_k f = 0$. Dann ist $f(X_k) = \sum_{\nu=1}^{k} g_\nu(X_k - x_\nu)$; es ist also f eine Summe von k nach je einer Veränderlichen konstanten Funktionen."

1. Im Falle $k = 1$ ist nach Satz (14a) bekanntlich [9]) $f(b) - f(a) = (b - a)\, Dx f(p) = 0$, also $f(x)$ eine Konstante.

2. Es sei $k \geqq 2$, und der Satz für Funktionen von $k - 1$ Veränderlichen bewiesen. Ist dann $[U_k; V_k]$ ein beliebiges Teilintervall von $[A_k; B_k]$, so ist nach (14), Satz 14a und der Voraussetzung

$$\Delta_{k-1} f[U_k - u_k;\ V_k - v_k \,|\, v_k] - \Delta_{k-1} f[U_k - u_k;\ V_k - v_k \,|\, u_k] = 0.$$

Setzt man nun

$$\varphi(X_k - x_k) = f(X_k - x_k,\ v_k) - f(X_k - x_k,\ u_k), \tag{46}$$

so gilt demnach

$$\Delta_{k-1}\, \varphi[U_k - u_k;\ V_k - v_k] = 0 \tag{47}$$

für jedes Intervall $[U_k - u_k;\ V_k - v_k]$, woraus sich überall $D(X_k - x_k)\varphi = 0$ ergibt. Für $\varphi(X_k - x_k)$ gilt aber der Satz als bewiesen, so daß man aus (46)

$$f(X_k - x_k,\ v_k) - f(X_k - x_k,\ u_k) = \sum_{\nu=1}^{k-1} g_\nu(X_k - x_k - x_\nu,\ u_k,\ v_k) \tag{48}$$

erhält. Hält man jetzt u_k fest, während man v_k als x_k variieren läßt, und schreibt man $g_k(X_k - x_k)$ statt $f(X_k - x_k, u_k)$, sowie $g_\nu(X_k - x_\nu)$ statt $g_\nu(X_k - x_k - x_\nu, u_k, v_k)$, und schließlich $f(X_k)$ statt $f(X_k - x_k, v_k)$, so geht (48) über in $f(X_k) = \sum_{\nu=1}^{k} g_\nu(X_k - x_\nu)$.

§ 9. Zweiter Mittelwertsatz: der Mittelwert für $f(B_k) - f(A_k)$.

Satz 16. (Hilfssatz.) „In P_k sei $f(X_k)$ nach X_k k-dimensional differenzierbar, und es sei $[A_k; B_k]$ eine nach P_k konvergierende Intervallschachtelung. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_k\ f[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]}{\Delta_k\, \psi_k[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]}$$

vorhanden, und zwar gleich $DX_k f(P_k)$."

Nach (5) ist nämlich

$$\frac{\Delta_k\ f[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]}{\Delta_k\, \psi_k[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]} = \frac{\sum_{r=0}^{k} (-1)^r\, \Delta_k\ f[P_k; A_{kr}^{(n)}, B_k - B_{kr}^{(n)}]}{\sum_{r=0}^{k} (-1)^r\, \Delta_k\, \psi_k[P_k; A_{kr}^{(n)}, B_k - B_{kr}^{(n)}]}. \tag{49}$$

Da P_k im Inneren von $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ liegt, haben alle 2^k Summanden des Nenners der rechten Seite übereinstimmendes Vorzeichen; nach einem Satz von Cauchy liegt daher der Wert des Bruches (49) zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der 2^k Brüche $\dfrac{\Delta_k\ f[P_k; A_{kr}^{(n)}, B_k^{(n)} - B_{kr}^{(n)}]}{\Delta_k\, \psi_k[P_k; A_{kr}^{(n)}, B_k^{(n)} - B_{kr}^{(n)}]}$. Mit wachsendem n streben aber diese beiden Extremwerte der Grenze $DX_k f(P_k)$ zu, ihr Zwischenwert (49) also auch, womit alles bewiesen ist.

Satz 17. (Zweiter Mittelwertsatz.) „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ überall definiert und k-dimensional nach X_k differenzierbar, in jedem von A_k ausgehenden Oberflächenintervall $[A_{kr}^*; B_{kr}^* \,|\, A_k - A_{kr}^*]$ außerdem r-dimensional nach X_{kr}^* differenzierbar. Dann gibt es im Inneren von $[A_k; B_k]$ einen Punkt P_k, für welchen die Gleichung

[9]) Vgl. z. B. Kowalewski, Grundz. der Diff. u. Int. R., Leipzig 1909, p. 72.

$$f(B_k) - f(A_k) = \sum_{r=1}^{k} \Delta_r \psi_r[A_{kr}; B_{kr}] \cdot DX_{kr} f(P_{kr}, A_k - A_{kr})$$

erfüllt ist."

Zum Beweise betrachten wir die für jedes Teilintervall $[U_k; V_k]$ von $[A_k; B_k]$ definierte Intervallfunktion

$$(50) \qquad \Lambda[U_k; V_k] = \sum_{r=1}^{k} \frac{\Delta_r f[U_{kr}; V_{kr} \mid A_k - A_{kr}]}{\Delta_r \psi_r[U_{kr}; V_{kr}] \cdot \Delta_{k-r} \psi_{k-r}[A_k - A_{kr}; B_k - B_{kr}]};$$

nach (18) und (21) ist speziell

$$(50a) \qquad \Lambda[A_k; B_k] = \frac{f(B_k) - f(A_k)}{\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]}.$$

Wir werden nun die Existenz einer Intervallschachtelung $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ mit dem Konvergenzpunkt P_k nachweisen, für welche

$$(51) \qquad \Lambda[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}] = \Lambda[A_k; B_k]$$

gilt; dabei sind für $n \geqq 0$ die Kantenlängen von $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ jeweils gleich $\left|\frac{b_\nu - a_\nu}{3^n}\right|$.

Es sei also $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ ein mit $[A_k; B_k]$ in der Orientierung vollständig übereinstimmendes Teilintervall von $[A_k; B_k]$, dessen Kanten die Längen $\left|\frac{b_\nu - a_\nu}{3^n}\right|$ haben; dann ist $\Delta_r \psi_r[A_{kr}^{(n)}; B_{kr}^{(n)}] = \frac{1}{3^{nr}} \Delta_r \psi_r[A_{kr}; B_{kr}]$, also

$$(52) \qquad \Lambda[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}] = \sum_{r=1}^{k} \frac{3^{nr} \Delta_r f[A_{kr}^{(n)}; B_{kr}^{(n)} \mid A_k - A_{kr}]}{\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]}.$$

Zerschneidet man jede Kante von $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ in drei gleiche Teile, so entsteht eine Gitterzerlegung von $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ in 3^k Gitterintervalle $[U_k^{(\mu)}; V_k^{(\mu)}]$, wobei $1 \leqq \mu \leqq 3^k$ ist; für jedes derartige Gitterintervall gilt nach (52)

$$(53) \qquad \Lambda[U_k^{(\mu)}; V_k^{(\mu)}] = \sum_{r=1}^{k} \frac{3^{(n+1)r} \Delta_r f[U_{kr}^{(\mu)}; V_{kr}^{(\mu)} \mid A_k - A_{kr}]}{\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]}.$$

Da nun je 3^r der Intervalle $[U_{kr}^{(\mu)}; V_{kr}^{(\mu)} \mid A_k - A_{kr}]$ eine gitterartige Zerlegung von $[A_{kr}^{(n)}; B_{kr}^{(n)} \mid A_k - A_{kr}]$ ergeben, so folgt aus (8) die Beziehung

$$(54) \qquad \sum_{\mu=1}^{3^k} \Delta_r f[U_{kr}^{(\mu)}; V_{kr}^{(\mu)} \mid A_k - A_{kr}] = 3^{k-r} \Delta_r f[A_{kr}^{(n)}; B_{kr}^{(n)} \mid A_k - A_{kr}],$$

wonach eine Summierung aller μ Gleichungen (53) zu

$$(55) \qquad \sum_{\mu=1}^{3^k} \Lambda[U_k^{(\mu)}; V_k^{(\mu)}] = \sum_{r=1}^{k} \frac{3^{k+nr} \Delta_r f[A_{kr}^{(n)}; B_{kr}^{(n)} \mid A_k - A_{kr}]}{\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]} = 3^k \Lambda[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$$

führt. Diese Beziehung (55) ist nur möglich, wenn

a) entweder für jeden Wert von μ die Gleichung $\Lambda[U_k^{(\mu)}; V_k^{(\mu)}] = \Lambda[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ gilt; in diesem Falle ist das einzige ganz im Inneren von $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ gelegene Gitterintervall auch das auf $[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ folgende Schachtelungsintervall $[A_k^{(n+1)}; B_k^{(n+1)}]$;

b) oder Λ für eines der Gitterintervalle größer, für ein anderes kleiner als $\Lambda[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$ ist. Verbindet man in diesem Falle die Anfangspunkte der beiden so beschaffenen Gitterintervalle durch eine stetige und, abgesehen vielleicht von ihren Endpunkten, ganz im Inneren von $[A_k^{(n)}; (B^n - H)_k]$ verlaufende Kurve, wobei

$h_\nu = \dfrac{b_\nu - a_\nu}{3^{n+1}}$ ist, so nimmt die Punktfunktion $\varphi(X_k) = \Delta[X_k; (X+H)_k]$ in einem Punkte $A_k^{(n+1)}$, der auf dem Inneren der Kurve liegt, den Zwischenwert $\Delta[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}]$; an, da φ eine Summe von lauter nach Satz 12 stetigen Funktionen ist. Damit ist wieder das nächste Schachtelungsintervall $[A_k^{(n+1)}; B_k^{(n+1)}]$ erreicht.

Aus (50) und Satz 16 ergibt sich nun

$$\lim_{n\to\infty} \Delta[A_k^{(n)}; B_k^{(n)}] = \sum_{r=1}^{k} \frac{DX_{kr} f(P_{kr}, A_k - A_{kr})}{\Delta_{k-r}\psi_{k-r}[A_k - A_{kr}; B_k - B_{kr}]}; \tag{56}$$

nimmt man (56) zusammen mit (51) und (50a), so erhält man weiter

$$\frac{f(B_k) - f(A_k)}{\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]} = \sum_{r=1}^{k} \frac{DX_k f(P_{kr}, A_k - A_{kr})}{\Delta_{k-r}\psi_{k-r}[A_k - A_{kr}; B_k - B_{kr}]}. \tag{57}$$

Durch Multiplikation von (57) mit $\Delta_k \psi_k[A_k; B_k]$ ergibt sich nunmehr sofort die Behauptung.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt noch

Satz 18. „Zu den Bedingungen von Satz 17 trete noch die weitere hinzu, daß alle genannten Ableitungen in ihren Existenzintervallen Null seien. Dann ist $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ konstant."

Da nämlich für alle Intervalle $[A_k; X_k]$ die Bedingungen des Satzes 17 erfüllt sind, so ergibt dieser $f(X_k) - f(A_k) = 0$, also $f(X_k) = f(A_k)$.

§ 10. Ableitungen nach höheren Komplexen und Ableitungen höherer Ordnung.

Alle unsere bisherigen Untersuchungen befaßten sich mit solchen Komplexen X_{kr}, welche jede Veränderliche x_ν höchstens einmal enthalten, und die wir „einfache Komplexe" nennen wollen. Nunmehr wollen wir zu höheren Komplexen übergehen.

Wir führen das Symbol X_{kr}^s ein; dasselbe bedeute einen Komplex von r Veränderlichen x_ν, von denen nur s verschieden sind (also eine Kombination zur r-ten Klasse mit Wiederholung); stets ist also $r \geqq s$, und zwar handelt es sich im Falle $r = s$ um einen „einfachen", im Falle $r > s$ um einen „höheren" Komplex; im ersteren Falle lassen wir den Index s weg. Wir werden durch eine lineare Abbildung die Untersuchung der höheren Komplexe auf die der einfachen zurückführen.

Durch ein System von k linearen Gleichungen

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n_\nu} y_{\nu\mu}, \tag{58}$$

wobei $n_\nu \geqq 1$ und $n = \sum_{\nu=1}^{k} n_\nu > k$ sein möge, wird der n-dimensionale Variabilitätsbereich des Komplexes Y_n, welcher alle $y_{\nu\mu}$ umfaßt, eindeutig und stetig auf den k-dimensionalen Variabilitätsbereich des Komplexes X_k abgebildet. Wir bezeichnen nun einen Komplex $(y_{\nu 1}, y_{\nu 2}, \ldots, y_{\nu n_\nu})$, der durch Festhalten eines Wertes von ν bei variablem μ entsteht, mit $Y_{n_\nu}^*$; einen beliebigen anderen Teilkomplex von Y_n aber mit $Y_{nr,ks}$; der Index r gibt dabei die Zahl aller in $Y_{nr,ks}$ vorkommenden Veränderlichen des Komplexes Y_n an, während der Index s die Zahl derjenigen Komplexe $Y_{n_\nu}^*$ bedeutet, aus denen die Elemente von $Y_{nr,ks}$ entnommen sind. Stets ist also $r \geqq s$.

Lassen wir nur diejenigen Koordinaten von Y_n variieren, welche zum Komplex $Y_{nr,ks}$ gehören, während wir die anderen festhalten, so wird in der Abbildung nur der Komplex X_{ks} variieren. Wir nennen daher X_{ks} den Bildkomplex von $Y_{nr,ks}$. Besonders einfach fällt die Abbildung eines Komplexes von der Form $Y_{nr,kr}$ aus, eines Komplexes, der aus keinem $Y_{n_\nu}^*$ mehr als ein Element $y_{\nu\mu}$ besitzt. Für einen solchen Komplex redu-

zieren sich nämlich unsere Abbildungsgleichungen (58) auf ein System von der Form

$$x_\nu = y_{\nu\mu} + c_\nu; \tag{59}$$

die Abbildung von $Y_{nr,kr^\bullet}$ auf $X_{kr^\bullet}$ ist also eine durch Parallelverschiebung hervorgerufene Kongruenz. Sind daher A_k, B_k, P_k die Bildpunkte von U_n, V_n, Q_n, so ist das Bild des Intervalles $[U_{nr,kr^\bullet}; V_{nr,kr^\bullet} \mid Q_n - Q_{nr,kr^\bullet}]$ das kongruente Intervall $[A^*_{kr}; B^*_{kr} \mid P_k - P^*_{kr}]$; insbesondere ist

$$\Delta_r \psi_r[U_{nr,kr^\bullet}; V_{nr,kr^\bullet} \mid Q_n - Q_{nr,kr^\bullet}] = \Delta_r \psi_r[A^*_{kr}; B^*_{kr} \mid P_k - P^*_{kr}]. \tag{60}$$

Eine Funktion $f(X_k)$ wird durch (58) erweitert zu einer Funktion $\bar{f}(Y_n)$; ist P_k der Bildpunkt von Q_n, so ist $\bar{f}(Q_n) = f(P_k)$. Für die beiden kongruenten Intervalle in (60) gilt daher auch

$$\Delta_r \bar{f}[U_{nr,kr^\bullet}; V_{nr,kr^\bullet} \mid Q_n - Q_{nr,kr^\bullet}] = \Delta_r f[A^*_{kr}; B_{kr} \mid P_k - P^*_{kr}]\,. \tag{60a}$$

Hieraus ergeben sich, unter Beibehaltung der Bezeichnungen, zwei Stetigkeitssätze:

Satz 19. „Für die Δ_r-Stetigkeit von $\bar{f}(Y_n)$ nach $Y_{nr,ks^\bullet}$ in Q_n ist hinreichend die Δ_s-Stetigkeit von $f(X_k)$ nach X^*_{ks} in P_k."

Zum Beweise grenzen wir unter Festhaltung von $P_k - P^*_{ks}$ nach Satz 1 eine s-dimensionale Umgebung von P_k ab:

$$|X^*_{ks} - P^*_{ks}| < \delta(\varepsilon), \tag{61}$$

derart, daß für zwei Punkte X^*_{ks} und X'^*_{ks} dieser Umgebung

$$|\Delta_s f[X^*_{ks}; X'^*_{ks}]| < \frac{\varepsilon}{2^{r-s}} \tag{61a}$$

gilt. Grenzen wir nun um Q_n unter Beibehaltung von $Q_n - Q_{nr,ks^\bullet}$ die r-dimensionale Umgebung

$$|Y_{nr,ks^\bullet} - Q_{nr,ks^\bullet}| < \frac{\delta}{n} \tag{62}$$

ab, so liegt das Bild von (62) ganz in (61). Nach (17) ist aber

$$\Delta_r \bar{f}[Q_{nr,ks^\bullet}; Y_{nr,ks^\bullet} \mid Q_n - Q_{nr,ks^\bullet}] = \tag{63}$$

$$\Delta_{r-s}(\Delta_s \bar{f}[Q_{ns,ks^\bullet}; Y_{ns,ks^\bullet} \mid Q_n - Q_{nr,ks^\bullet}, Y_{nr,ks^\bullet} - Y_{ns,ks^\bullet}])\ [Q_{nr,ks^\bullet} - Q_{ns,ks^\bullet}; Y_{nr,ks^\bullet} - Y_{ns,ks^\bullet} \mid Q_n - Q_{nr,ks^\bullet}].$$

Jeder der 2^{r-s} Summanden der rechts stehenden Δ_{r-s}-Funktion ist eine unter die Bedingung (61a) fallende Δ_s-Funktion; hieraus ergibt sich als Abschluß des Beweises $|\Delta_r \bar{f}[Q_{nr,ks^\bullet}; Y_{nr,ks^\bullet} \mid Q_n - Q_{nr,ks^\bullet}]| < \varepsilon$ innerhalb (62).

Satz 20. „Für die Stetigkeit von $\bar{f}(Y_n)$ in Q_n ist notwendig und hinreichend die Stetigkeit von $f(X_k)$ in P_k."

1. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus der Stetigkeit der Abbildung.

2. Aus der Stetigkeit von $f(X_k)$ in P_k folgt die Δ_r-Stetigkeit von $f(X_k)$ in P_k nach allen Teilkomplexen X_{kr} von X_k (Satz 3). Hieraus ergibt sich nach Satz 19 die Δ_r-Stetigkeit von $\bar{f}(Y_n)$ in Q_n nach allen Teilkomplexen $Y_{nr,ks}$, also nach Satz 3 wiederum die Stetigkeit von $\bar{f}(Y_n)$ in Q_n.

Aus der r-dimensionalen Differenzierbarkeit von $f(X_k)$ nach einem einfachen Komplex X^*_{kr} im Punkte P_k folgt nach (60) und (60a) die r-dimensionale Differenzierbarkeit von $\bar{f}(Y_n)$ nach $Y_{nr,kr^\bullet}$ in Q_n, und umgekehrt. Nun möge der Fall eintreten, daß $\bar{f}(Y_n)$ in Q_n nach einem Komplex $Y_{nr,ks^\bullet}$ r-dimensional differenzierbar ist, für den $r > s$, also keine kongruente Abbildung auf X_k vorhanden ist. In diesem Falle nennen wir

auch $f(X_k)$ in P_k r-dimensional differenzierbar, und zwar nach demjenigen Komplex $X_{kr}^{s^*}$, welcher jede seiner Veränderlichen x_ν in derselben Anzahl enthält wie Y_{nr,ks^*} Elemente aus $Y_{n\nu}^*$ besitzt, und setzen $DX_{kr}^{s^*} f(P_k) = DY_{nr,ks^*} \bar{f}(Q_n)$.

Alle diese Ableitungen sind noch als Ableitungen erster Ordnung anzusprechen, da zu ihrer Bildung nur ein einziger, wenn auch mehrdimensionaler Grenzübergang vollzogen wird. Besitzt aber eine Ableitung $DX_{kr_1}^{s_1} f(X_k)$, als Funktion von X_k betrachtet, selbst wieder eine r_2-dimensionale Ableitung $DX_{kr_2}^{s_2} DX_{kr_1}^{s_1} f(P_k)$ in P_k, so ist diese als Ableitung zweiter Ordnung anzusprechen. Zwischen diesen Ableitungen höherer Ordnung und den Ableitungen erster Ordnung nach mehrdimensionalen Komplexen bestehen einige einfache Zusammenhänge, die auf der Beziehung (17) beruhen.

Es sei Y_{nr} ein einfacher Teilkomplex von Y_n, und es sei Y_{nr} in m Teilkomplexe $Y_{nr_\lambda} (1 \leqq \lambda \leqq m)$ zerlegt. Ist nun eine Funktion $\bar{f}(Y_n)$ und ein fester Punkt Q_n in Y_n gegeben, so betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\varphi(Y_n) = \Delta_{r-r_1} \bar{f}[Q_{nr} - Q_{nr_1};\ Y_{nr} - Y_{nr_1} \mid Q_n - Q_{nr},\ Y_{nr_1}]. \tag{64}$$

Setzen wir nun $\bar{f}(Y_n)$ als r_1-dimensional differenzierbar nach Y_{nr_1} voraus, so ist $\varphi(Y_n)$ als Summe von 2^{r-r_1} nach Y_{nr_1} differenzierbaren Funktionen selbst nach diesem Komplex differenzierbar, und zwar ist

$$DY_{nr_1} \varphi(Y_n) = \Delta_{r-r_1} DY_{nr_1} \bar{f}[Q_{nr} - Q_{nr_1};\ Y_{nr} - Y_{nr_1} \mid Q_n - Q_{nr},\ Y_{nr_1}]. \tag{65}$$

Satz 21. „In $[A_k;\ B_k]$ sei $f(X_k)$ definiert, im Punkte P_k sei die Ableitung $DX_{kr}^s f(P_k)$ vorhanden, wobei der Komplex X_{kr}^s aus m Teilkomplexen $X_{kr_\lambda}^{s_\lambda}$ bestehe. Existiert dann noch überall $\chi(X_k) = DX_{kr_{m-1}}^{s_{m-1}} DX_{kr_{m-2}}^{s_{m-2}} \dots DX_{kr_2}^{s_2} DX_{kr_1}^{s_1} f(X_k)$, so existiert auch $DX_{k_{rm}}^{s_m} \chi(P_k)$ und ist gleich $DX_{kr}^s f(P_k)$."

Zum Beweise gehen wir nach (58) in einen n-dimensionalen Raum Y_n über, in welchem alle auftretenden Ableitungen nach einfachen Komplexen gebildet sind; den Index s lassen wir bei der Bezeichnung der Teilkomplexe von Y_n weg, da er im Beweise nicht gebraucht wird. Die Existenzbedingung für $DX_{kr}^s f(P_k)$ lautet

$$\left| \frac{\Delta_r \bar{f}[Q_{nr};\ Y_{nr} \mid Q_n - Q_{nr}]}{\Delta_r \psi_r[Q_{nr};\ Y_{nr}]} - DX_{kr}^s f(P_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wenn} \tag{66}$$

$$| Y_{nr} - Q_{nr} | < \delta(\varepsilon) \tag{66a}$$

ist, wobei wieder P_k der Bildpunkt von Q_n ist. Unter Benutzung von (17), (64) und (21) geht diese Bedingung über in

$$\left| \frac{\Delta_{r_1} \varphi[Q_{nr_1};\ Y_{nr_1} \mid Q_n - Q_{nr},\ Y_{nr} - Y_{nr_1}]}{\prod_{\lambda=1}^{m} \Delta_{r_\lambda} \psi_{r_\lambda}[Q_{r_\lambda};\ Y_{r_\lambda}]} - DX_{kr}^s f(P_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{67}$$

Läßt man hier Y_{nr_1} unter Festhaltung von $Y_{nr} - Y_{nr_1}$ nach Q_{nr_1} konvergieren, so geht (67) unter Berücksichtigung von (65) über in

$$\left| \frac{\Delta_{r-r_1} DY_{nr_1} \bar{f}[Q_{nr} - Q_{nr_1};\ Y_{nr} - Y_{nr_1} \mid Q_n - Q_{nr}, Q_{nr_1}]}{\prod_{\nu=2}^{m} \Delta_{r_\lambda} \psi_{r_\lambda}[Q_{r_\lambda};\ Y_{r_\lambda}]} - DX_{kr}^s f(P_k) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{68}$$

Die von (66) bis (68) vorgenommene Aufspaltung läßt sich fortsetzen, sie führt nach $m - 1$ Schritten zu

$$\left| \frac{\Delta_{r_m} \bar{\chi}[Q_{nr_m};\ Y_{nr_m} \mid Q_n - Q_{nr_m}]}{\Delta_{r_m} \psi_{r_m}[Q_{r_m};\ Y_{r_m}]} - DX_{kr}^s f(P_k) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{69}$$

Diese Ungleichung bedeutet aber die Existenz von $DY_{nr_m}\bar{\chi}(Q_n) = DX^s_{kr}f(P_k)$, also auch die von $DX^{sm}_{kr_m}\chi(P_k) = DX^s_{kr}f(P_k)$.

Hieraus ziehen wir zwei Folgerungen:

Folgerung 1. „Existieren $DX^s_{kr}f(P_k)$ und $DX^{sm}_{kr_m}\chi(P_k)$, so ist

$$DX^s_{kr}f(P_k) = DX^{sm}_{kr_m}\chi(P_k).“$$

Folgerung 2. „Ist die Funktion $f(X_k)$ in $[A_k; B_k]$ nach X^s_{kr} und allen seinen Teilkomplexen mehrdimensional differenzierbar, so existieren auch alle Ableitungen höherer Ordnung, welche durch sukzessives eindimensionales Differenzieren nach den Veränderlichen von X^s_{kr} gewonnen werden können, und zwar ist deren Wert gleich dem Werte der ihnen entsprechenden mehrdimensionalen Ableitung erster Ordnung, also unabhängig von der Differentiationsfolge.“

Satz 22. „In $[A_k; B_k]$ sei $f(X_k)$ definiert und überall die Ableitung

$$\chi_1(X_k) = DX^{s_m}_{kr_m}DX^{s_{m-1}}_{kr_{m-1}}\ldots DX^{s_2}_{kr_2}DX^{s_1}_{kr_1}f(X_k)$$

vorhanden; außerdem sei $\chi_1(X_k)$ in P_k nach X_{ks} stetig, wobei X^s_{kr} den aus allen Komplexen $X^{s\lambda}_{kr_\lambda}(1 \leqq \lambda \leqq m)$ bestehenden Komplex bedeute. Dann existiert auch $DX^s_{kr}f(P_k)$ und ist gleich $\chi_1(P_k)$.“

Wie vorhin ist

$$(70)\qquad \frac{\Delta_r \bar{f}[Q_{nr};\ Y_{nr} \mid Q_n - Q_{nr}]}{\Delta_r \psi_r[Q_{nr};\ Y_{nr}]} = \frac{\Delta_{r_1}\varphi[Q_{nr_1};\ Y_{nr_1} \mid Q_n - Q_{nr},\ Y_{nr} - Y_{nr_1}]}{\prod_{\lambda=1}^{m}\Delta_{r_\lambda}\psi_{r_\lambda}[Q_{nr_\lambda};\ Y_{nr_\lambda}]}.$$

Wendet man auf den Zähler der rechten Seite den speziellen ersten Mittelwertsatz (Satz 14a) an, so geht (70) unter Berücksichtigung von (65) über in

$$(71)\qquad \frac{\Delta_r \bar{f}[Q_{nr};\ Y_{nr} \mid Q_n - Q_{nr}]}{\Delta_r\ \psi_r[Q_{nr};\ Y_{nr}]} = \frac{\Delta_{r-r_1}\,DY_{nr_1}\bar{f}[Q_{nr} - Q_{nr_1};\ Y_{nr} - Y_{nr_1} \mid Q_n - Q_{nr},\ U_{nr_1}]}{\prod_{\lambda=2}^{m}\Delta_{r_\lambda}\psi_{r_\lambda}[Q_{nr_\lambda};\ Y_{nr_\lambda}]},$$

wobei U_{nr_1} im Inneren des Intervalles $[Q_{nr_1};\ Y_{nr_1}]$ liegt.

Setzt man diese Anwendung des Mittelwertsatzes fort, so erhält man schließlich

$$(72)\qquad \frac{\Delta_r \bar{f}[Q_{nr};\ Y_{nr} \mid Q_n - Q_{nr}]}{\Delta_r\ \psi_r[Q_{nr};\ Y_{nr}]} = \bar{\chi}_1(U_{nr}, Q_n - Q_{nr}).$$

Da $\chi_1(X_k)$ in P_k nach X_{ks} stetig ist, so ist $\bar{\chi}_1(Y_n)$ wegen Satz 19 in Q_n nach Y_{nr} stetig; lassen wir nun in (72) den Veränderlichenkomplex Y_{nr} nach Q_{nr} streben, so ergibt sich aus dieser Stetigkeit sofort die Behauptung.

Folgerung. Die mehrdimensionale Ableitung erster Ordnung nach einem Komplex kann also immer dann durch eine sukzessive Ableitung nach den Veränderlichen dieses Komplexes ersetzt werden, wenn diese sukzessive Ableitung existiert und als Endergebnis eine nach dem Differentiationskomplex stetige Funktion ergibt.

§ 11. Die Taylorentwicklung.

Um eine Belastung der Schreibweise mit allzuviel Indizes und die damit verbundene Unübersichtlichkeit zu vermeiden, führen wir die Taylorentwicklung für den speziellen Fall einer Funktion von drei Veränderlichen durch. Die Entwicklung einer Funktion von k Veränderlichen läßt sich von da aus leicht übersehen, da der allgemeine Fall nichts grundsätzlich Neues mehr enthält.

In einem Quader sei überall $f(x_1, x_2, x_3)$ definiert und jede Ableitung von der Form $Dx_3^{\mu_3}Dx_2^{\mu_2}Dx_1^{\mu_1}f$ mit $0 \leqq \mu_1 \leqq n_1$, $0 \leqq \mu_2 \leqq n_2$, $0 \leqq \mu_3 \leqq n_3$ vorhanden und stetig, wobei n_1, n_2, n_3 drei feste ganze Zahlen seien.

Nun sei (b_1, b_2, b_3) ein Punkt des Definitionsbereiches von f, dann betrachten wir die Funktion

$$(73)\quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(b_1, b_2, b_3) - \sum_{\mu_3=0}^{n_3-1}\sum_{\mu_2=0}^{n_2-1}\sum_{\mu_1=0}^{n_1-1}\left(\prod_{\nu=1}^{3}\frac{(b_\nu - x_\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!}\right) Dx_3^{\mu_3} Dx_2^{\mu_2} Dx_1^{\mu_1} f(x_1, x_2, x_3);$$

speziell ist

$$(73a)\qquad \varphi(b_1, b_2, b_3) = 0.$$

Die Funktion φ ist total dreidimensional differenzierbar. Man erhält nämlich zunächst

$$(74)\quad Dx_1\varphi = -\frac{(b_1 - x_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\cdot\sum_{\mu_3=0}^{n_3-1}\sum_{\mu_2=0}^{n_2-1}\left(\prod_{\nu=2}^{3}\frac{(b_\nu - x_\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!}\right) Dx_3^{\mu_3} Dx_2^{\mu_2} Dx_1^{n_1} f(x_1, x_2, x_3)$$

nebst zwei analogen Ausdrücken für $Dx_2\varphi$ und $Dx_3\varphi$.

Sodann wegen Satz 22

$$(74a)\quad D(x_1, x_2)\varphi = -\left(\prod_{\nu=1}^{2}\frac{(b_\nu - a_\nu)^{n_\nu-1}}{(n_\nu-1)!}\right)\cdot\sum_{\mu=0}^{n_3-1}\frac{(b_3 - x_3)^{\mu_3}}{\mu_3!} Dx_3^{\mu_3} Dx_2^{n_2} Dx_1^{n_1} f(x_1, x_2, x_3)$$

nebst zwei analogen Ausdrücken für $D(x_2, x_3)\varphi$ und $D(x_3, x_1)\varphi$, schließlich

$$(74b)\quad D(x_1, x_2, x_3)\varphi = -\left(\prod_{\nu=1}^{3}\frac{(b_\nu - a_\nu)^{n_\nu-1}}{(n_\nu-1)!}\right)\cdot Dx_3^{n_3} Dx_2^{n_2} Dx_1^{n_1} f(x_1, x_2, x_3).$$

Ist nun (a_1, a_2, a_3) ein anderer Punkt des Definitionsbereiches von f, so ergibt sich aus (73) nach einfacher Umstellung

$$(75)\quad f(b_1, b_2, b_3) = \sum_{\mu_3=0}^{n_3-1}\sum_{\mu_2=0}^{n_2-1}\sum_{\mu_1=0}^{n_1-1}\left(\prod_{\nu=1}^{3}\frac{(b_\nu - a_\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!}\right)\cdot Dx_3^{\mu_3} Dx_2^{\mu_2} Dx_1^{\mu_1} f(a_1, a_2, a_3) + \varphi(a_1, a_2, a_2);$$

der Wert $\varphi(a_1, a_2, a_3)$ ist also das Restglied der vom Punkte (a_1, a_2, a_3) aus vorgenommenen, rechtkantig abgebrochenen [11]) Taylorentwicklung für den Funktionswert $f(b_1, b_2, b_3)$. Wir können nun dieses Restglied $\varphi(a_1, a_2, a_3)$ auf zwei verschiedene Arten durch den zweiten Mittelwertsatz (Satz 17) ausdrücken.

1. Aus (73a) folgt $\varphi(a_1, a_2, a_3) = \varphi(a_1, a_2, a_3) - \varphi(b_1, b_2, b_3)$; also existiert nach Satz 17 ein Punkt (p_1, p_2, p_3) im Inneren des Intervalles $[a_1, a_2, a_3;\ b_1, b_2, b_3]$, für welchen

$$\begin{aligned}(75)\quad \varphi(a_1, a_2, a_3) = {} & + (b_1 - a_1)\frac{(b_1 - p_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} Dx_1^{n_1} f(p_1, b_2, b_3)\\ & + (b_2 - a_2)\frac{(b_2 - p_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} Dx_2^{n_2} f(b_1, p_2, b_3)\\ & + (b_3 - a^3)\frac{(b_3 - p_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!} Dx_3^{n_3} f(b_1, b_2, p_3)\\ & - (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\frac{(b_1 - p_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\frac{(b_2 - p_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} Dx_2^{n_2} Dx_1^{n_1} f(p_1, p_2, b_3)\\ & - (b_2 - a_2)(b_3 - a_3)\frac{(b_2 - p_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\frac{(b_3 - p_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!} Dx_3^{n_3} Dx_2^{n_2} f(b_1, p_2, p_3)\\ & - (b_3 - a_3)(b_1 - a_1)\frac{(b_3 - p_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!}\frac{(b_1 - p_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} Dx_3^{n_3} Dx_1^{n_1} f(p_1, b_2, p_3)\\ & + \left(\prod_{\nu=1}^{3}(b_\nu - a_\nu)\frac{(b_\nu - p_\nu)^{n_\nu-1}}{(n_\nu-1)!}\right) Dx_3^{n_3} Dx_2^{n_2} Dx_1^{n_1} f(p_1, p_2, p_3)\end{aligned}$$

---

[10]) Das Symbol $Dx_\nu^{\mu_\nu}$ bezeichne die μ_ν-fache Ableitung nach x_ν.

[11]) Vgl. zu dieser Ausdrucksweise „Neder, Über Funktionen reeller Argumente", Math. Ztschr. **24** (1926), p. 759ff.

gilt. Diese Form des Restgliedes ist auf ganz anderem Wege schon von Herrn Neder [12]) abgeleitet worden. Denken wir uns den Punkt (a_1, a_2, a_3) fest und den Punkt (b_1, b_2, b_3) variabel, so benötigen wir zur Abschätzung dieses Restgliedes die Kenntnis von $2^3 - 1$ Ableitungen in einer vollständigen dreidimensionalen Umgebung von (a_1, a_2, a_3), im allgemeinen Fall die Kenntnis von $2^k - 1$ Ableitungen in einer vollständigen k-dimensionalen Umgebung von A_k.

Dieser Restgliedform stellen wir eine neue zur Seite, welche zwar eine größere Anzahl von Ableitungen enthält, aber nur von *einer einzigen* dieser Ableitungen die Kenntnis in einer vollständigen Umgebung fordert. Es ist

2. $\varphi(a_1, a_2, a_3) = -(\varphi(b_1, b_2, b_3) - \varphi(a_1, a_2, a_3))$; nach Satz 17 gibt es also einen Punkt (q_1, q_2, q_3) im Inneren des Intervalles $[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3]$, für welchen

(76) $\varphi(a_1, a_2, a_3) =$

$$(b_1 - a_1)\frac{(b_1 - q_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\sum_{\mu_3=0}^{n_3-1}\sum_{\mu_2=0}^{n_2-1}\frac{(b_2-a_2)^{\mu_2}}{\mu_2!}\frac{(b_3-a_3)^{\mu_3}}{\mu_3!}Dx_3^{\mu_3}Dx_2^{\mu_2}Dx_1^{n_1}f(q_1, a_2, a_3)$$

$$+(b_2 - a_2)\frac{(b_2 - q_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\sum_{\mu_1=0}^{n_1-1}\sum_{\mu_3=0}^{n_3-1}\frac{(b_3-a_3)^{\mu_3}}{\mu_3!}\frac{(b_1-a_1)^{\mu_1}}{\mu_1!}Dx_3^{\mu_3}Dx_2^{n_2}Dx_1^{\mu_1}f(a_1, q_2, a_3)$$

$$+(b_3 - a_3)\frac{(b_3 - q_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!}\sum_{\mu_2=0}^{n_2-1}\sum_{\mu_1=0}^{n_1-1}\frac{(b_1-a_1)^{\mu_1}}{\mu_1!}\frac{(b_2-a_2)^{\mu_2}}{\mu_2!}Dx_3^{n_3}Dx_2^{\mu_2}Dx_1^{\mu_1}f(a_1, a_2, q_3)$$

$$+(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\frac{(b_1 - q_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\frac{(b_2 - q_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\sum_{\mu_3=1}^{n_3-1}\frac{(b_3-a_3)^{\mu_3}}{\mu_3!}Dx_3^{\mu_3}Dx_2^{n_2}Dx_1^{n_1}f(q_1, q_2, a_3)$$

$$+(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)\frac{(b_2 - q_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\frac{(b_3 - q_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!}\sum_{\mu_1=0}^{n_1-1}\frac{(b_1-a_1)^{\mu_1}}{\mu_1!}Dx_3^{n_3}Dx_2^{n_2}Dx_1^{\mu_1}f(a_1, q_2, q_3)$$

$$+(b_3 - a_3)(b_1 - a_1)\frac{(b_3 - q_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!}\frac{(b_1 - q_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)}\sum_{\mu_2=0}^{n_2-1}\frac{(b_2-a_2)^{\mu_2}}{\mu_2!}Dx_3^{n_3}Dx_2^{\mu_2}Dx_1^{n_1}f(q_1, a_2, q_3)$$

$$+\left(\prod_{\nu=1}^{3}(b_\nu - a_\nu)\frac{(b_\nu - q_\nu)^{n_\nu-1}}{(n_\nu-1)!}\right)Dx_3^{n_3}Dx_2^{n_2}Dx_1^{n_1}f(q_1, q_2, q_3) \quad \text{gilt.}$$

Diese Restgliedform enthält $(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) - n_1 n_2 n_3$ Ableitungen; sie erfordert aber bei variablem (b_1, b_2, b_3) die Kenntnis nur *einer einzigen* dieser Ableitungen in einer vollen dreidimensionalen Umgebung von (a_1, a_2, a_3), während alle übrigen in ihr vorkommenden Ableitungen nur innerhalb zwei- bzw. eindimensionaler Umgebungen von (a_1, a_2, a_3) abgeschätzt zu werden brauchen. Im allgemeinen Fall ist die Anzahl aller in dieser Restgliedform vorkommenden Ableitungen gleich $\prod_{\nu=1}^{k}(n_\nu + 1) - \prod_{\nu=1}^{k} n_\nu$, von denen aber wieder nur *eine einzige* in einer vollen k-dimensionalen Umgebung auftritt. Dies wird in vielen Fällen die Entscheidung darüber, ob das Restglied den Grenzwert Null besitzt, also über die Darstellbarkeit der Funktion durch die Taylorreihe, wesentlich vereinfachen.

[12]) a. a. O. [11]).

Eingegangen 8. Dezember 1932.

Über die Integralgleichung des Skineffekts.

Von *Erich Rothe* in Breslau.

1. Einleitung *).

Die Dämpfungserscheinungen, die beim Eindringen eines elektromagnetischen Wechselfeldes in einen Leiter auftreten und bewirken, daß mit wachsender Frequenz das Innere des Leiters stromlos wird, bezeichnet man bekanntlich als Skineffekt. In gewissen speziellen Fällen kann man diesen durch Angabe expliziter Formeln mathematisch verfolgen, z. B. im Falle ebener Wellen, die auf eine ebene Leiteroberfläche fallen oder — unter Vernachlässigung des Verschiebungstroms — im Falle eines kreiszylindrischen Leiters. Bei beliebig geformten Leitern scheint jedoch ein theoretischer Beweis für das geschilderte Verhalten noch nicht vorzuliegen, vielmehr beruht die bisher angewandte Methode zur Berechnung des Skineffekts im wesentlichen auf folgendem Gedankengang: Setzt man die Tatsache der Stromverdrängung voraus, so werden in der Nähe des Randes die Ableitungen in Richtung der Randnormalen gegenüber denen in einer dazu senkrechten Richtung überwiegen. Vernachlässigt man daher die letzteren in der bei Weglassung des Verschiebungsstroms das Problem beherrschenden *partiellen* Differentialgleichung, so erhält man eine leicht zu integrierende *gewöhnliche* Differentialgleichung. Zur eindeutigen Bestimmung der Lösung dieser Differentialgleichung verwendet man diejenige Anfangsbedingung, die sich ergibt, wenn man am Rande des Bereiches jene Feldverteilung annimmt, die sich bei „unendlicher" Frequenz einstellt. Man findet dann leicht, daß die Stromdichte im Innern exponentiell mit zunehmendem Produkt aus Randentfernung und Wurzel der Frequenz abnimmt. Wenn diese Berechnungsmethode auch praktisch zu brauchbaren Resultaten führt, so ist vom theoretischen Standpunkt aus doch zweierlei einzuwenden: erstens wird die Tatsache des Skineffekts nicht bewiesen, sondern vorausgesetzt; zweitens ist von vornherein jedenfalls nicht zu übersehen, ob die angegebene Methode zur Festlegung der Lösung nicht in Widerspruch mit der vorgenommenen Vernachlässigung des Verschiebungsstroms steht.

*) Für den lediglich mathematisch interessierten Leser sei folgendes bemerkt: Aufgabe ist die asymptotische Behandlung der Integralgleichung (10), in welcher $\mathfrak{B}$ ein im Endlichen gelegener zweidimensionaler Bereich ist und der Kern K durch (7) und λ durch (6) gegeben sind. (Die in (6) auftretenden Größen $\mu, \omega, \sigma, \varepsilon, \varepsilon_a$ sind positive Konstanten.) Die rechte Seite $A^{(0)}$ von (10) genügt der Differentialgleichung (11). Es handelt sich dann um den Beweis der folgenden Behauptungen. Erstens: Ist P_0 ein innerer vom Rande um mehr als $\eta > 0$ entfernter Punkt von $\mathfrak{B}$, so gilt unter der Voraussetzung (18) für die Lösung I von (10) die Abschätzung (44), in welcher l durch (16) und β durch (23) gegeben sind (§ 5). Zweitens (§ 6): Eine entsprechende Abschätzung gilt (für $\sigma \to \infty$), wenn $A^{(0)}$ nicht vorgegeben ist, sondern noch einen Parameter $\varkappa$ enthält, der so zu bestimmen ist, daß I der Bedingungsgleichung (46) bei vorgegebenem W genügt. Nach dieser Vorbemerkung kann der nur mathematisch Interessierte die Lektüre mit § 3 beginnen. Ich erwähne noch, daß die vorliegende Arbeit gewisse Berührungspunkte mit meiner Arbeit „Über asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben elliptischer partieller Differentialgleichungen" (Math. Ann. **108**, 1933) hat. Jedoch bedingt die Tatsache, daß der Kern K der vorliegenden Arbeit komplex ist, eine wesentlich andere Methode der Abschätzung. — Eine Übersicht über die Resultate der vorliegenden Arbeit wurde in der Zeitschr. f. Physik **83** (1933), S. 184 gegeben.

Im folgenden soll auf Grund der Maxwellschen Gleichungen und der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung [1]) ohne Benutzung weiterer Annahmen und ohne Vernachlässigung des Verschiebungsstroms [2]) das Eintreten des Skineffekts bei zylindrischen Leitern *beliebigen* Querschnitts, in deren Innern die Permeabilität μ denselben Wert hat wie im Äußeren, bewiesen werden. In §§ 3—5 wird gezeigt, daß die Stromstärke exponentiell mit zunehmendem Produkt aus Randentfernung und der Wurzel aus $|l| = |\omega^2 \varepsilon\mu - 4\pi i\sigma\omega\mu|$ [3]) abnimmt, wenn bei der Zunahme von l der Quotient $\sigma/\omega\varepsilon$ und $\sigma/\omega\varepsilon_a$ oberhalb einer festen positiven Zahl bleibt (siehe Gl. (44)), während Vernachlässigung des Verschiebungsstroms darüber hinaus $\omega\varepsilon \ll \sigma$ bedeutet. In letzterem Falle geht l in $-4\pi i\sigma\omega\mu$ über, sodaß sich das oben erwähnte bekannte Resultat ergibt (vgl. die Schlußbemerkung von § 5).

Die Handhabe zu dem in Rede stehenden Beweise bietet die Formulierung des Problems durch eine inhomogene Fredholmsche Integralgleichung, wie sie in letzter Zeit insbesondere von Manneback [4]), F. Noether [4a]) und O. Strutt [5]) zur Behandlung des Skineffekts bei beliebig gestalteten Leitern herangezogen wurde. Bei diesen Autoren handelt es sich jedoch um die für den Fall der Vernachlässigung des Verschiebungsstroms gültige Integralgleichung. Die exakte Integralgleichung wurde — zu anderen Zwecken — von W. Sternberg aufgestellt [6]); der Vollständigkeit halber und um einiger daran zu knüpfender Bemerkungen willen ist in § 2 die einfache Ableitung der allgemein gültigen Integralgleichung wiedergegeben.

Die bisher geschilderten Ausführungen beziehen sich auf den im Leiter unter Einfluß eines *gegebenen* harmonischen Wechselfeldes sich einstellenden Strom. Man kann aber die Aufgabe auch so stellen, daß z. B. der Gesamtstrom oder die Joulesche Wärme vorgegeben ist. Diese Fälle bieten gegenüber dem früheren die Komplikation, daß der inhomogene Teil der Integralgleichung nicht vorgegeben ist, sondern einen erst zu bestimmenden Parameter enthält. In § 6 wird der zweite der genannten beiden Fälle behandelt. (Die Behandlung des ersten ist mir bisher nur bei Vernachlässigung des Verschiebungsstroms gelungen.)

2. Aufstellung der Integralgleichung.

$\varphi^{(0)} = 0$ sei das skalare Potential und $\mathfrak{A}_x^{(0)} = 0$, $\mathfrak{A}_y^{(0)} = 0$, $\mathfrak{A}_z^{(0)} = A^{(0)}(x, y)\, e^{i\omega t}$ seien die Komponenten des Vektorpotientials $\mathfrak{A}$ eines gegebenen elektromagnetischen Feldes in einem den ganzen x, y, z-Raum erfüllenden nicht leitenden Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε_a und der magnetischen Permeabilität μ. (Die zwischen skalarem Potential φ und Vektorpotential $\mathfrak{A}$ bestehende Beziehung

---

[1]) Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresber. d. D. M. V. **21** (1912), § 7.

[2]) Die häufig angewandte Methode, den Verschiebungsstrom bei Aufstellung der Gleichungen von vornherein zu vernachlässigen, erweist sich im allgemeinen als unzulässig. Vgl. die ausführliche diesbezügliche Bemerkung in § 2 der vorliegenden Arbeit (S. 221 f).

[3]) ω Frequenz, σ Leitfähigkeit, μ magnetische Permeabilität, ε und ε_a die Werte der Dielektrizitätskonstanten im Innern bzw. Äußern des Leiters.

[4]) Journal of Mathematics and Physics **I** (1922).

[4a]) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **7** (1927), S. 453; Ann. d. Phys. (4. F.) **84** (1927), S. 775. Handbuch d. Physik **XIII** (1928), S. 97.

[5]) Ann. d. Physik (5. F.) **8** (1931), S. 779, wo auch weitere Angaben über Arbeiten des gleichen sowie anderer Verfasser zu finden sind.

[6]) W. Sternberg, Anw. d. Integralgleichungen auf Beugung und Eigenschwingungen der elektromagnetischen Lichttheorie. Zeitschr. f. Phys. **64** (1930), S. 638. In dieser Arbeit wird die in Rede stehende Integralgleichung benutzt, jedoch nicht abgeleitet. Die Ableitung wird in einer demnächst in den Math. Annalen erscheinenden Arbeit von Herrn Sternberg enthalten sein.

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{div} \dot{\mathfrak{A}} + \Delta\varphi = 0$$

ist dann offenbar erfüllt.) Gefragt wird nach demjenigen Feld, das entsteht, wenn in das gegebene Feld ein (oder mehrere) zylindrische parallel zur z-Achse gerichtete Leiter der Leitfähigkeit σ, der Dielektrizitätskonstanten ε und der magnetischen Permeabilität μ gebracht werden, d. h. also nach dem skalaren Potential φ und dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ des neuen Feldes. φ und $\mathfrak{A}$ müssen folgenden Bedingungen genügen: sie erfüllen im Innern und Äußern des Leiters die „Telegraphengleichung", sie sind miteinander durch die Beziehung (1) verknüpft, an der Grenze zwischen Leiter und Nichtleiter genügen sie solchen Bedingungen, daß die bekannten Stetigkeitsbedingungen der Maxwellschen Theorie für die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die magnetische $\mathfrak{H}$ gewährleistet sind; für $\sigma = 0$ soll ferner $\varphi = \varphi^{(0)}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)}$ werden und schließlich soll $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^{(0)}$ der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügen. Den genannten Bedingungen genügen wir durch den Ansatz

$$\text{(2)} \qquad \varphi = 0, \quad \mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y = 0, \quad \mathfrak{A}_z = A(x, y)\, e^{i\omega t}.$$

Dann genügt A der sich aus der Telegraphengleichung sofort ergebenden Beziehung

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \Delta A + (\varepsilon\mu\omega^2 - 4\pi i\sigma\omega\mu)\, A &= 0 \quad \text{im Innern} \\ \Delta A + \varepsilon_a\mu\omega^2 A &= 0 \quad \text{im Äußern} \end{aligned}$$
$$\left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

und aus der allgemein gültigen Beziehung $\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\varphi$ folgt nach (2)

$$\text{(4)} \qquad E(x, y) = -i\omega A(x, y),$$

wenn $\mathfrak{E}_z = E(x, y)\, e^{i\omega t}$ gesetzt ist. Hieraus folgt, daß A beim Durchtritt durch die Randkurve $\mathfrak{C}$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ der (x, y)-Ebene, welcher aus dieser durch den zylindrischen Leiter ausgeschnitten wird, stetig ist; denn die zum Leiter tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ sind stetig. Es ist aber auch die Normalableitung von A beim Durchgang durch $\mathfrak{C}$ stetig; denn da μ innen und außen denselben Wert hat, ist $\mathfrak{H}$ stetig, woraus wegen $\mu\dot{\mathfrak{H}} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ — d. h. nach (2) $\mu\dot{\mathfrak{H}}_x = \dfrac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial y}$, $\mu\dot{\mathfrak{H}}_y = -\dfrac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}$ — die Behauptung folgt. Da nun $A^{(0)}$ überall derselben Gleichung genügt wie A im Äußern, so gilt nach (3) für $\widetilde{A} = A - A^{(0)}$

$$\text{(5)} \qquad \Delta\widetilde{A} + \varepsilon_a\mu\omega^2\widetilde{A} = \begin{cases} -\lambda A & \text{im Innern} \\ 0 & \text{im Äußern} \end{cases}$$

mit

$$\text{(6)} \qquad \lambda = \mu\omega^2(\varepsilon - \varepsilon_a) - 4\pi i\sigma\omega\mu.$$

Ist $H_0^{(2)}$ die zweite Hankelsche Funktion 0-ter Ordnung und setzt man

$$\text{(7)} \qquad K(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr)$$
$$(k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu}; \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

so folgt durch bekannte Anwendung des Greenschen Satzes auf den Bereich $\mathfrak{B}$ für einen inneren Punkt x, y, wenn die innere Normale, der Randkurve $\mathfrak{C}$ mit ν bezeichnet wird,

$$\text{(8)} \qquad \widetilde{A}(x, y) = \lambda\iint_{\mathfrak{B}} A(\xi, \eta)\, K(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \int_{\mathfrak{C}} \left(\widetilde{A}\frac{\partial K}{\partial\nu} - K\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\nu}\right) ds.$$

Ist ferner $\mathfrak{C}_1$ ein den Bereich $\mathfrak{B}$ umfassender Kreis vom Radius R, dessen Mittelpunkt in $\mathfrak{B}$ liegen möge, so folgt aus (5) durch Anwendung des Greenschen Satzes auf den von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ berandeten Bereich

$$(9)\qquad \int_{\mathfrak{C}_1}\left(\widetilde{A}\,\frac{\partial K}{\partial \nu}-K\,\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial \nu}\right)ds-\int_{\mathfrak{C}}\left(\widetilde{A}\,\frac{\partial K}{\partial \nu}-K\,\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial \nu}\right)ds=0\,.$$

Für $R\to\infty$ geht nun das über $\mathfrak{C}_1$ erstreckte Integral gegen 0, wie man aus der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\sqrt{R}\left(\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial R}+ik\,\widetilde{A}\right)\right\}=0\,^{7})$$

auf Grund des asymptotischen Verhaltens von $H_0^{(2)}$ sofort erkennt. Daher ist auch das von R unabhängige über $\mathfrak{C}$ erstreckte Integral in (9) gleich 0. Wegen der Stetigkeit von $\widetilde{A}$ und $\partial\widetilde{A}/\partial\nu$ ist dieses Integral aber gleich dem Kurvenintegral in Gleichung (8). Wegen $\widetilde{A}=A-A^{(0)}$ liefert diese daher für A die Integralgleichung

$$A(x,y)-\lambda\iint_{\mathfrak{B}}A(\xi,\eta)\,K(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=A^{(0)}\,,$$

wenn x, y ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist. Durch Multiplikation mit $-i\sigma\omega$ folgt nach (4) für die Stromstärke $I\,e^{i\omega t}=\sigma E\,e^{i\omega t}$ eine Integralgleichung, die in leicht verständlicher Bezeichnungsweise

$$(10)\qquad I(P)-\lambda\int_{\mathfrak{B}}K(P,\Pi)\,I(\Pi)\,d\Pi=-i\sigma\omega A^{(0)}(P)$$

lautet, wobei P ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist und λ bzw. K durch (6) bzw. (7) gegeben sind, während $A^{(0)}$ eine vorgegebene Funktion ist, die jedoch die Gleichung

$$(11)\qquad \Delta A^{(0)}+\varepsilon_a\mu\omega^2A^{(0)}=0$$

erfüllt, da ja $\mathfrak{A}^{(0)}$ als Vektorpotential die Telegraphengleichung befriedigt.

Bemerkung über die Vernachlässigung des Verschiebungsstroms[8]).

Die Vernachlässigung des Verschiebungsstroms wird vielfach in der Weise vorgenommen, daß man die entsprechenden Glieder schon in Gleichung (3) wegläßt, so daß diese

$$(12)\qquad \Delta A=\begin{cases}4\pi i\sigma\omega\mu A & \text{im Innern}\\ 0 & \text{im Äußern}\end{cases}$$

lautet; entsprechend gilt an Stelle von (11) die Gleichung

$$(13)\qquad \Delta A^{(0)}=0\qquad \text{im Innern und Äußern.}$$

Diese Methode führt aber zu Widersprüchen. Um dies einzusehen, betrachten wir den Fall, daß $A^{(0)}=\text{Const}=C$, ferner $\mathfrak{B}$ das Innere des Einheitskreises um den Nullpunkt und $\mathfrak{C}_1$ ein zu seiner Peripherie $\mathfrak{C}$ konzentrischer Kreis vom Radius R ist. Alle Feldgrößen hängen dann nur von der Nullpunktsentfernung r ab. Im Unendlichen stimmt das gestörte Feld mit dem ungestörten überein, d. h. es ist dort $A=A^{(0)}=C$. Ferner ist in einem Punkte von $\mathfrak{C}_1$ $\dfrac{\partial A}{\partial r}$ gleich der tangentiellen Komponente $\mu\mathfrak{H}_s$ von $\mu\mathfrak{H}$, daher verhält sich $\dfrac{\partial A}{\partial r}$ für große r auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes wie konst./r. Aus (12) folgt nun unter Beachtung der Stetigkeit von A und $\dfrac{\partial A}{\partial r}$ am Rande von $\mathfrak{B}$

[7]) Sommerfeld l. c., S. 331 u. 333. Bei Sommerfeld steht in der Ausstrahlungsbedingung $-ik$ anstatt $+ik$, und es wird die erste Hankelsche Funktion anstatt der zweiten benutzt. Das liegt daran, daß bei Sommerfeld der Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ geschrieben wird, während wir $e^{+i\omega t}$ geschrieben haben.

[8]) Für das Verständnis der folgenden Paragraphen überflüssig.

$$A(0) = 2\omega\sigma\mu i \int_{\mathfrak{B}} A(\xi, \eta) \log \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \left(A \frac{\partial \log r}{\partial r} - \log r \frac{\partial A}{\partial r} \right) ds$$

$$= 2\omega\sigma\mu i \int_{\mathfrak{B}} A(\xi, \eta) \log \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_1} \left(A \frac{\partial \log r}{\partial r} - \log r \frac{\partial A}{\partial r} \right) ds,$$

also

$$A(0) = 2i\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} A \log \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\, d\xi\, d\eta - A(R) + R \log R \cdot \frac{\partial A}{\partial R}.$$

Für $R \to \infty$ erhält man aber einen Widerspruch. Denn das linksstehende und das erste rechtsstehende Glied sind von R unabhängig, das zweite rechtsstehende strebt nach dem endlichen Wert $A^{(0)} = C$, während das dritte sich nach obigem wie konst. $\log R$ verhält.

Es ist leicht einzusehen, warum die gemachten Vernachlässigungen zur Aufstellung der Integralgleichung (10) unzulässig sind. Wie aus

$$(14) \quad K = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr) = -\frac{1}{2\pi} \ln (kr) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2}{\gamma} - \frac{i}{4} + \text{Glieder mit } (kr)^2 \text{ als Faktor}$$

($\ln \gamma$ Eulersche Konstante)

folgt, werden mit $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu}$ auch Glieder der Form kr vernachlässigt. Nun wurde aber bei Aufstellung der Integralgleichung (10) das ganze Außengebiet mitbenutzt, so daß (wie klein auch der Leiterquerschnitt ist) beliebig große Werte von r in die Rechnung eingehen. Es ist daher klar, daß das Glied mit $k^2 = \varepsilon_a \mu \omega^2$ in der zweiten auf das Außengebiet bezüglichen Gleichung (3) nicht vernachlässigt werden darf.

Etwas anderes ist es, wenn man die fraglichen Glieder nachträglich in (10) vernachlässigt, da r hier der Abstand zweier in $\mathfrak{B}$ gelegener Punkte ist. Man erhält dann nach (14)

$$(15) \quad I(P) - 2i\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} \left(\ln kr - \ln \frac{2}{\gamma} + i \frac{\pi}{2} \right) I(\Pi)\, d\Pi = -i\sigma\omega A^{(0)}(P)\ ^{8a}).$$

Inwieweit die Lösung dieser Gleichung eine Näherung für die Lösung von (10) darstellt, bedürfte natürlich noch einer Untersuchung. Auf diese brauchen wir jedoch hier nicht einzugehen, da im folgenden stets die strenge Gleichung (10) benutzt wird.

3. Abschätzung des lösenden Kerns von (10).

$\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)$ sei der lösende Kern des Kernes K der Integralgleichung (10). Wir wollen die folgende Abschätzung nachweisen: Ist P_0 ein Punkt von $\mathfrak{B}$, der vom Rande mindestens um η entfernt ist, so daß also der Kreis k_η mit η um P_0 ganz in $\mathfrak{B}$ liegt, und ist b der Imaginärteil von $\sqrt{l} = a + ib$, wo

$$(16) \qquad l = \omega^2 \varepsilon\mu - 4\pi i \sigma\omega\mu$$

gesetzt ist, so gilt unter Benutzung des bekannten Landauschen Symbols O

[8a]) Gl. (15) stimmt mit derjenigen, die man erhalten hat, wenn man den Verschiebungsstrom von vornherein vernachlässigte, nicht vollkommen überein. Diese lautet nämlich

$$I(P) - 2i\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} I(\Pi) \ln r\, d\Pi = -i\omega\sigma A^{(0)}(P)$$

(vgl. Strutt l. c. Anm. 5), wo die Gleichung für das entsprechende räumliche Problem angegeben ist), während Gl. (15) sich in der Form

$$I(P) - 2i\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} I(\Pi) \ln r\, d\Pi = -i\omega\sigma (A^{(0)} + k_1)$$

schreiben läßt, wo $k_1 = \left\{ 2 \ln \left(\frac{2}{\gamma k} \right) - i\pi \right\} \int_{\mathfrak{B}} I(t)\, dt.$

$$\int_{\mathfrak{B}-k_\eta} |\mathfrak{G}(P_0, \Pi, \lambda)|\, d\Pi = O\left(\frac{e^{-|b|\eta}}{\sqrt[4]{4\pi\sigma\omega\mu}}\right), \tag{17}$$

wenn λ so gegen Unendlich geht, daß $\omega\varepsilon/\sigma$ und $\omega\varepsilon_a/\sigma$ unterhalb einer festen positiven Zahl $4\pi q$ liegen, d. h.

$$\left.\begin{matrix}\omega\varepsilon \\ \omega\varepsilon_a\end{matrix}\right\} < 4\pi q\sigma \tag{18}$$

ist. Genauer gilt

$$\int_{\mathfrak{B}-k_\eta} |\mathfrak{G}(P_0, \Pi, \lambda)|\, d\Pi < \sqrt{\frac{\eta\mathfrak{B}}{2}}\,(q^2+1)^{1/4}\,\frac{1}{|\chi(l,\eta)|}\,\frac{e^{-|b|\eta}}{\sqrt[4]{4\pi\sigma\omega\mu}}, \tag{19}$$

wobei mit $\mathfrak{B}$ der Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ bezeichnet ist und unter der Voraussetzung (18) für $l \to \infty$

$$|\chi(l,\eta)| = 1 + O\left(\frac{1}{\eta\sqrt{l}}\right) \tag{20}$$

gilt. (Man beachte, daß wegen (18) aus dem Unendlichwerden von λ das von l folgt und umgekehrt.) Genauer gilt

$$\chi(l,\eta) = \left\{1 + \frac{2R_2}{\sqrt{\pi}} + e^{-2|b|\eta}\, e^{2i(a\eta - 1/4\pi)}\left(1 + \frac{2R_1}{\sqrt{\pi}}\right)\right\} e^{-i(a\eta - 1/4\pi)}, \tag{21}$$

wobei

$$\left.\begin{matrix}|R_1| \\ |R_2|\end{matrix}\right\} < \frac{3\sqrt{\pi}}{16\,|\sin\beta/4|^3}\,\frac{1}{|\eta\sqrt{l}|} \tag{22}$$

mit

$$\beta = \operatorname{arc} l \tag{23}$$

ist. Nach (16) und (18) ist

$$-\frac{\pi}{2} < \beta \leqq -\operatorname{arctg} q, \tag{24}$$

wobei der durch $\operatorname{arctg} 0 = 0$ festgelegte Zweig des arctg gemeint ist.

Zum Nachweis der behaupteten Abschätzung beachten wir, daß $\mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)$ als Funktion von P im Innern von $\mathfrak{B}$ (für $P \neq \Pi$) mit dem durch (16) gegebenem Wert von l der Differentialgleichung $\Delta\mathfrak{G} + l\mathfrak{G} = 0$ genügt, wie leicht einzusehen ist [9]). Innerhalb des Kreises k_η um P_0 mit dem Radius η ist dann $\mathfrak{G}$ gewiß eine reguläre Lösung

---

[9]) Nach (7) ist nämlich

* $$\Delta K + k^2 K = 0,$$

und für jede einmal stetig differenzierbare Funktion φ ist für einen beliebigen Bereich $\mathfrak{B}'$

$$(\Delta + k^2)\int_{\mathfrak{B}'} K(P,\Pi')\,\varphi(\Pi')\,d\Pi' = -\varphi(P) \qquad (P < \mathfrak{B}').$$

Aus der bekannten Relation (siehe z. B. Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik, 2. Aufl. 1931, S. 119)

** $$\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda) = K(P,\Pi) + \lambda\int_{\mathfrak{B}} K(P,\Pi')\,\mathfrak{G}(\Pi',\Pi,\lambda)\,d\Pi'$$

zwischen Kern und lösendem Kern folgt daher, wenn P in $\mathfrak{B}$ liegt und $\mathfrak{B}'$ ein P enthaltender Teilbereich von $\mathfrak{B}$ ist, während Π in $\mathfrak{B}$—$\mathfrak{B}'$ liegt,

$$\Delta\mathfrak{G} + k^2\mathfrak{G} = (\Delta + k^2)\left(\lambda\int_{\mathfrak{B}'} K(P,\Pi')\,\mathfrak{G}(\Pi',\Pi,\lambda)\,d\Pi' + \lambda\int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'} \mathfrak{G}(\Pi',\Pi,\lambda)\,(\Delta + k^2)\,K(P,\Pi')\,d\Pi'\right)$$
$$= -\lambda\,\mathfrak{G}(P,\Pi,\lambda) \qquad \text{(Alle Differentiationen beziehen sich auf } P).$$

Nach (6) und (16) folgt hieraus die Behauptung $\Delta\mathfrak{G} + l\,\mathfrak{G} = 0$ für einen inneren Punkt P von $\mathfrak{B}$. (Liegt P außerhalb $\mathfrak{B}$, so folgt aus * und **: $\Delta\mathfrak{G} + k^2\,\mathfrak{G} = 0$).

dieser Gleichung, wenn $\Pi < \mathfrak{B} - k_\eta$. Daher gilt für $\mathfrak{G}$ (wie für jede reguläre Lösung W von $\Delta W + lW = 0$)[10]) die Darstellung

$$\mathfrak{G}(P_0, \Pi, \lambda) = p(l, \eta) \int_{k_\eta} \mathfrak{G}(\Pi', \Pi, \lambda)\, d\Pi' ,$$

wobei

$$p(l, \eta) = \frac{1}{2\pi\eta} \frac{l^{1/4}}{I_1(\eta\sqrt{l})} \tag{25}$$

gesetzt ist und I_1 die Besselsche Funktion erster Art und erster Ordnung bedeutet.

Also ist

$$\int_{\mathfrak{B}-k_\eta} |\mathfrak{G}(P_0, \Pi, \lambda)|\, d\Pi = |p(l, \eta)| \int_{\mathfrak{B}-k_\eta} \left| \int_{k_\eta} \mathfrak{G}(\Pi', \Pi, \lambda)\, d\Pi' \right| d\Pi \,. \tag{26}$$

Wir wollen nun zuerst das Integral rechts in (26) abschätzen.

Zu diesem Zwecke beachten wir, daß

$$U(\Pi) = -4\pi\omega\sigma\mu \int_{k_\eta} \mathfrak{G}(\Pi, \Pi', \lambda)\, d\Pi' = -4\pi\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\Pi')\, \mathfrak{G}(\Pi, \Pi', \lambda)\, d\Pi' \tag{27}$$

$$\left(\varphi(\Pi') = \begin{cases} 1 & \text{für } \Pi' < k_\eta \\ 0 & ,, \quad \Pi' < \mathfrak{B} - k_\eta \end{cases}\right)$$

der Integralgleichung

$$U(\Pi) - \lambda \int_{\mathfrak{B}} K(\Pi, \Pi')\, U(\Pi')\, d\Pi' = -4\pi\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\Pi')\, K(\Pi', \Pi)\, d\Pi' \text{ [11]}, \tag{28}$$

also (mit Ausnahme der Peripherie von k_η) der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta U + (\varepsilon\mu\omega^2 - 4\pi i\sigma\omega\mu)\, U &= 4\pi\omega\sigma\mu\varphi \quad \text{in } \mathfrak{B} \\ \Delta U + \varepsilon_a\mu\omega^2 U &= 0 \qquad\qquad \text{außerhalb } \mathfrak{B} \end{aligned}$$

genügt. Trennt man Real- und Imaginärteil, indem man $U = U_1 + iU_2$ setzt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_1 + \varepsilon\mu\omega^2 U_1 + 4\pi\sigma\omega\mu U_2 &= 4\pi\omega\sigma\mu\varphi \\ \Delta U_2 + \varepsilon\mu\omega^2 U_2 - 4\pi\sigma\omega\mu U_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{in } \mathfrak{B}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_1 + \varepsilon_a\mu\omega^2 U_1 &= 0 \\ \Delta U_2 + \varepsilon_a\mu\omega^2 U_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{außerhalb } \mathfrak{B} . \tag{29}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit U_2, der zweiten mit U_1 und nachfolgende Subtraktion liefert

$$U_2\Delta U_1 - U_1\Delta U_2 + 4\pi\sigma\omega\mu\,(U_1^2 + U_2^2) = 4\pi\omega\sigma\mu\varphi U_2 ,$$

woraus

$$-\int_{\mathfrak{C}} \left(U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \nu} \right) ds + 4\pi\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} (U_1^2 + U_2^2)\, d\Pi = 4\pi\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} U_2\varphi\, d\Pi \tag{30}$$

folgt. Ähnlich erhält man aus den beiden letzten Gleichungen (29)

$$\int_{\mathfrak{C}} \left(U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \nu} \right) ds = \int_{\mathfrak{C}_1} \left(U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \nu} \right) ds , \tag{30a}$$

wobei $\mathfrak{C}_1$ die auf S. 220 unten angegebene Bedeutung hat. Aus den bekannten asymptotischen Formeln für $H_0^{(2)}$ [12]) ergibt sich nun nach (28) und (7)

---

[10]) A. Hammerstein, Über Entw. gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwer taufgaben Math. Zeitschr. **27** (1928), S. 288, Gl. (17).

[11]) Denn die Lösung von (28) ist nach der Grundeigenschaft des lösenden Kerns (siehe z. B. Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik, 2. Aufl. 1931, S. 119, Gl. (62)).

$$U(\Pi) = -4\pi\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\Pi')\, K(\Pi', \Pi)\, d\Pi' + \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\Pi, \Pi'') \left\{ -4\pi\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\Pi')\, K(\Pi', \Pi'')\, d\Pi' \right\} d\Pi'' .$$

Das stimmt mit (27) überein, wie man unter Beachtung von Gl. ** in Anm. 9 leicht einsieht.

[12]) Siehe z. B. Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, S. 167 f. und S. 196 ff.

$$4i\frac{\partial U}{\partial R}=\int_{\mathfrak{B}}\sqrt{2}\,\frac{e^{-i\left(rk-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r\pi k}}\left\{1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\left\{-ik-\frac{1}{2r}\right\}\{\lambda U(\Pi')-4\pi\omega\sigma\mu\varphi(\Pi')\}\frac{\partial r}{\partial R}\,d\Pi'$$

$$4i\cdot ikU=\int_{\mathfrak{B}}\sqrt{2}\,\frac{e^{-i\left(rk-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r\pi k}}\left\{1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}ik\{\lambda U(\Pi')-4\pi\omega\sigma\mu\varphi(\Pi')\}\,d\Pi'\,.$$

Also:

$$(31)\quad \frac{\partial U}{\partial R}+ikU=\frac{1}{4i}\int_{\mathfrak{B}}\sqrt{2}\,\frac{e^{-i\left(rk-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r\pi k}}\left\{1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\{\lambda U(\Pi')-4\pi\omega\sigma\mu\varphi(\Pi')\}$$
$$\left\{ik\left(1-\frac{\partial r}{\partial R}\right)-\frac{1}{2r}\frac{\partial r}{\partial R}\right\}d\Pi'\,.$$

Nun ist $\partial r/\partial R=\cos\gamma$, wenn γ der Winkel zwischen den zwei Strahlen ist, die von dem Punkt Π von $\mathfrak{C}_1$ nach dem Punkt Π' von $\mathfrak{B}$ und dem (ebenfalls in $\mathfrak{B}$ gelegenen) Mittelpunkt von $\mathfrak{C}_1$ gezogen sind. Dann ist offenbar $\gamma=O\left(\frac{1}{R}\right)$ und $\cos\gamma=1+O\left(\frac{1}{R^2}\right)$. Da ferner $O\left(\frac{1}{r}\right)=O\left(\frac{1}{R}\right)$ ist, so folgt aus (31)

$$\frac{\partial U}{\partial R}+ikU=0\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right)$$

oder durch Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\frac{\partial U_1}{\partial R}-kU_2=O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right);\qquad \frac{\partial U_2}{\partial R}+kU_1=O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right).$$

Passende Kombination ergibt, da U, also auch U_1 und U_2 gleich $O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$,

$$U_2\frac{\partial U_1}{\partial R}-U_1\frac{\partial U_2}{\partial R}=k(U_1^2+U_2^2)+O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

sodaß aus (30) und (30a), da $\frac{\partial}{\partial\nu}=-\frac{\partial}{\partial R}$ längs $\mathfrak{C}_1$ ist,

$$(32)\quad k\int_{\mathfrak{C}_1}(U_1^2+U_2^2)\,ds+O\left(\frac{1}{R}\right)+4\pi\omega\sigma\mu\int_{\mathfrak{B}}(U_1^2+U_2^2)\,d\Pi=4\pi\omega\sigma\mu\int_{\mathfrak{B}}\varphi U_2\,d\Pi\,,$$

also unter Beachtung der Definition von φ

$$\int_{\mathfrak{B}-k_\eta}(U_1^2+U_2^2)\,d\Pi\leqq\int_{k_\eta}|U_2|\,d\Pi-\int_{k_\eta}U_2^2\,d\Pi+O\left(\frac{1}{R}\right)$$

folgt. Da die hier auftretenden Integrale von R unabhängig sind, so folgt weiter

$$\int_{\mathfrak{B}-k_\eta}(U_1^2+U_2^2)\,d\Pi\leqq\int_{k_\eta}(|U_2|-U_2^2)\,d\Pi\leqq\int_{p}(|U_2|-U_2^2)\,d\Pi\leqq\int_{p}|U_2|\,d\Pi\,,$$

wenn p die Menge derjenigen Punkte von k_η bedeutet, in welchen $|U_2|\geqq U_2^2$ ist. In diesen ist aber $|U_2|\leqq 1$, so daß sich

$$\int_{\mathfrak{B}-k_\eta}|U|^2\,d\Pi=\int_{\mathfrak{B}-k_\eta}(U_1^2+U_2^2)\,d\Pi\leqq\text{Inhalt von }k_\eta=\pi\eta^2$$

ergibt. Also wird unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung und Beachtung der Definition (27) von U

$$(33)\qquad \int_{\mathfrak{B}-k_\eta}^{} \left| \int_{k_\eta} \mathfrak{G}(\Pi', \Pi, \lambda)\, d\Pi' \right| d\Pi = \frac{1}{4\pi\omega\sigma\mu} \int_{\mathfrak{B}-k_\eta} |U(\Pi)|\, d\Pi \leqq \frac{\sqrt{\mathfrak{B}}}{4\pi\sigma\omega\mu}\, \eta\sqrt{\pi}\,.$$

Damit ist die Abschätzung des zweiten Faktor in (26) geleistet. Zur Abschätzung des ersten $p(l, \eta)$ beachten wir, daß der Imaginärteil b von $\sqrt{l}$ (s. Gl. (16)) ohne Beschränkung der Allgemeinheit als nicht negativ angenommen werden kann, da p in $\sqrt{l}$ gerade ist, so daß also b die positive Wurzel aus

$$b^2 = \tfrac{1}{2}\{\sqrt{\omega^4\varepsilon^2\mu^2 + (4\pi\sigma\omega\mu)^2} - \omega^2\varepsilon\mu\}$$

ist. Setzen wir

$$(34)\qquad \chi(l, \eta) = \frac{l^{3/4}}{\sqrt{2\pi}\,\eta^{1/2} e^{b\eta}\, p(l, \eta)}$$

so folgt die Behauptung (19) aus (26), (33), (16) und (18), wobei sich die Aussagen (20)—(22) über $\chi(l, \eta)$ leicht aus der Darstellung

$$(35)\qquad I_1(\zeta) = \frac{H_1^{(1)}(\zeta) + H_1^{(2)}(\zeta)}{2}$$

ergeben, wenn man für die Hankelschen Funktionen $H_1^{(1)}$, $H_1^{(2)}$ die Integraldarstellung (siehe z. B. Watson, l. c. Anm. 12)

$$(36)\qquad H_1^{(\nu)}(\zeta) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\zeta}}\, e^{\pm i(\zeta - 3/4\pi)} \int_0^{\infty e^{i\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}} e^{-u}\, u^{1/2} \left(1 \pm \frac{iu}{2\zeta}\right)^{1/2} du,$$

benutzt [12]), wo die + Zeichen für $\nu = 1$, die — Zeichen für $\nu = 2$ stehen und $\zeta = \eta\sqrt{l}$ ist, also nach (23), (24) (vgl. die obige Festsetzung)

$$(37)\qquad \arg \zeta = \frac{\beta}{2} + \pi \text{ [13])}.$$

---

[13]) Der Gang der Rechnung sei kurz angegeben: Unter Benutzung der Formel

$$(1+h)^{1/2} = 1 + \frac{h}{2}\int_0^1 (1 + h\,t)^{-1/2}\, dt$$

erhält man

$$(*)\qquad \int_0^{\infty e^{i\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}} e^{-u}\, u^{1/2} \left(1 \pm \frac{iu}{2\zeta}\right)^{1/2} du = \int_0^{\infty e^{i\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}} u^{1/2}\, e^{-u}\, du + R_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 1, 2)$$

mit

$$(**)\qquad R_\nu(\zeta) = \frac{\pm i}{4\zeta} \int_0^{\infty e^{i\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}} u^{3/2}\, e^{-u} \int_0^1 \left(1 \pm \frac{iut}{2\zeta}\right)^{-1/2} dt\, du.$$

Da der Realteil von u in dem in (*) rechts stehenden Integral nach (24) positiv ist, so ist dieses gleich $\Gamma(3/2) = 1/2\sqrt{\pi}$. Aus (36) erhält man daher wegen $\sqrt{l} = a + ib$

$$(***)\qquad \frac{1}{2} H_1^{(\nu)}(\eta\sqrt{l}) = \frac{e^{\mp b\eta}}{\sqrt{2\pi\eta\sqrt{l}}}\, e^{\pm i(a\eta - 3/4\pi)} \left(1 + \frac{2R_\nu}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Nach (34) und (25) ist nun $\chi = e^{-b\eta}\sqrt{2\pi\eta\sqrt{l}}\, I_1(\eta\sqrt{l})$, so daß aus (35) und (***) der in (21) angegebene Wert von χ folgt. Zum Nachweis der Abschätzung (22) von R_ν beachte man, daß nach (37) die Gleichung $\arg \frac{ut}{2i\zeta} = -\frac{\beta}{4} - \pi$ gilt. Daher wird

$$\left|1 \pm \frac{iut}{2\zeta}\right| = \left|1 \mp \frac{ut}{2i\zeta}\right| \geqq \left|\sin \frac{\beta}{4}\right|,$$

4. Abschätzung der Lösung einer Hilfsintegralgleichung.

An Stelle von (10) betrachten wir zunächst diejenige Integralgleichung, die aus (10) entsteht, wenn man auf deren rechter Seite die Funktion $A^{(0)}(P)$ durch die sogleich zu definierende in ganz $\mathfrak{B}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $B(P)$ ersetzt, die quellenmäßig durch den Kern K darstellbar ist. ($A^{(0)}$ hat außer im Falle $A^{(0)} \equiv 0$ in $\mathfrak{B}$ diese Eigenschaft nicht; denn aus $A^{(0)}(P) = \int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, \varphi(\Pi)\, d\Pi$ folgt nach (7) für $P < \mathfrak{B}$ bei genügender Regularität von φ: $\Delta A^0 + \varepsilon_a \mu\omega^2 A^{(0)} = -\varphi(P)$, also nach (11): $\varphi \equiv 0$ in $\mathfrak{B}$; also ist $A^{(0)} = 0$.) $B(P)$ ist folgendermaßen definiert: ist P_0 ein fester im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener vom Rande um *mehr* als η entfernter Punkt, bedeutet ferner r den Abstand dieses Punktes von dem variablen Punkte P und ist $\eta_1 = \eta + \eta'$ gesetzt, wobei die positive Zahl η' so klein ist, daß P_0 vom Rande des Bereiches $\mathfrak{B}$ noch mindestens um η_1 entfernt ist, so soll sein:

$$(38)\qquad B(P) = \begin{cases} A^{(0)}(P) & \text{für } 0 \leqq r \leqq \eta \\ A^{(0)}(P) \left\{ \dfrac{(\eta_1 - \eta)^3 - (r - \eta)^3}{(\eta_1 - \eta)^3} \right\}^3 & \text{,, } \eta < r < \eta_1 \\ 0 & \text{,, } \eta_1 \leqq r. \end{cases}$$

Daß B tatsächlich quellenmäßig durch K darstellbar ist, folgt aus dem Greenschen Satz; aus diesem ergibt sich nämlich unter Beachtung der Definition (7) von K sowie der Tatsache, daß B auch für $r = \eta$ und $r = \eta_1$ zweimal stetig differenzierbar ist und daß B und seine Normalableitung am Rande von $\mathfrak{B}$ verschwinden,

$$(39)\qquad B(P) = \int_{\mathfrak{B}} - K(P, \Pi) \{\Delta B + \varepsilon_a \mu\omega^2 B\}\, d\Pi .$$

Die Lösung der in der geschilderten Weise aus (10) entstandenen Integralgleichung

$$(40)\qquad J(P) - \lambda \int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, J(\Pi)\, d\Pi = -\, i\sigma\omega B(P)$$

lautet bekanntlich [14])

$$(41)\qquad J(P) = -\, i\sigma\omega B(P) - i\sigma\omega\lambda \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda)\, B(\Pi)\, d\Pi ,$$

woraus unter Benutzung von (39) und Gleichung ** in Anm. 9 leicht

$$J(P) = i\sigma\omega \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda) \{\Delta B + \varepsilon_a \mu\omega^2 B\}\, d\Pi$$

folgt. Auf Grund von (11) und (38) verschwindet nun $\Delta B + \varepsilon_a \mu\omega^2 B$ im Innern des Kreises k_η um P_0 mit dem Radius η. Daher wird

$$J(P) = i\sigma\omega \int_{\mathfrak{B} - k_\eta} \mathfrak{G}(P, \Pi, \lambda) \{\Delta B + \varepsilon_a \mu\omega^2 B\}\, d\Pi .$$

---

und aus (**) folgt

$$|R_\nu(\zeta)| \leqq \frac{1}{|\sin \beta/4|^{1/2}} \frac{1}{4|\eta\sqrt{l}|} \int_0^{\infty e^{i\left(\frac{\beta}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}} |u^{3/2} e^{-u}\, du| = \frac{1}{|\sin \beta/4|^{1/2}} \frac{1}{4|\eta\sqrt{l}|} \int_0^{\infty} v^{3/2} e^{-v \cos\left(\frac{\beta}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}\, dv$$

$$= \frac{1}{|\sin \beta/4|^{1/2}} \frac{1}{4|\eta\sqrt{l}|} \int_0^{\infty} v^{3/2} e^{-v|\sin \beta/4|}\, dv = \frac{1}{|\sin \beta/4|^{3}} \frac{1}{4|\eta\sqrt{l}|}\, \Gamma(5/2).$$

Da $\Gamma(5/2) = 3/4\sqrt{\pi}$ ist, so folgt (22).

[14]) Siehe z. B. Courant-Hilbert, l. c. Anm. 11.

Setzt man hierin insbesondere $P = P_0$, so ergibt die Anwendung der Abschätzung (19)

$$(42) \quad |J(P_0)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta\mathfrak{B}}{\sqrt{\mu\pi}}}\,(1+q^2)^{3/8}\,\mathrm{Max}\,|\Delta B + \varepsilon_a\mu\omega^2 B|\,(\sigma\omega)^{3/4}\,\frac{e^{-|b|\eta}}{|\chi(l,\eta)|}.$$

5. Abschätzung der Lösung der Integralgleichung (10).

Die Lösung von (10) wird gegeben durch

$$I(P) = -i\sigma\omega A^{(0)}(P) - i\sigma\omega\lambda\int_{\mathfrak{B}} G(P, \Pi, \lambda)\,A^{(0)}(\Pi)\,d\Pi\,.$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (41) ab, so erhält man auf Grund der Definition (38) von B insbesondere für $P = P_0$

$$I(P_0) - J(P_0) = -i\sigma\omega\lambda\int_{\mathfrak{B}-k_\eta} \mathfrak{G}(P_0, \Pi, \lambda)\,\{A^{(0)}(\Pi) - B(\Pi)\}\,d\Pi\,.$$

Aus (19) folgt daher

$$|I(P_0) - J(P_0)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta\mathfrak{B}}{\sqrt{\mu\pi}}}\,(1+q^2)^{3/8}\,\mathrm{Max}\,|A^{(0)} - B|\,|\lambda|\,(\sigma\omega)^{3/4}\,\frac{e^{-|b|\eta}}{|\chi(l,\eta)|}\,.$$

Hieraus im Verein mit (42) und (23) ergibt sich

$$(43) \quad |I(P_0)|$$
$$< \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta\mathfrak{B}}{\sqrt{\mu\pi}}}\,(1+q^2)^{3/8}\,\{|\lambda|\,\mathrm{Max}\,|A^{(0)} - B| + \mathrm{Max}\,|\Delta B + \varepsilon_a\mu\omega^2 B|\}\,|\sigma\omega|^{3/4}\,\frac{e^{-|\sqrt{i}\sin(\beta/2)|\eta}}{|\chi(l,\eta)|}\,.$$

Dabei ist zu beachten, daß nach (16) und (18)

$$|\sin\beta| = \frac{4\pi\sigma\omega\mu}{\sqrt{(\varepsilon\mu\omega^2)^2 + (4\pi\sigma\omega\mu)^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$$

ist. Nach (43), (6), (18) und (20) können wir schreiben

$$(44) \qquad |I(P_0)| < \text{konst.}\; l^{1+3/4}\,e^{-|\sqrt{i}\sin\beta/2|\eta}\,,$$

wo konst. von ω und σ unabhängig ist. Speziell im Fall der Vernachlässigung des Verschiebungsstroms wird l nach (16) gleich $-4\pi i\sigma\omega\mu$, also $\beta = -\frac{\pi}{2}$; der Dämpfungsfaktor in (44) wird dann in Übereinstimmung mit bekannten Resultaten gleich $e^{-\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}\,\eta}$.

6. Skineffekt bei vorgegebener Joulescher Wärme.

Wir setzen in (10)

$$(45) \qquad i\sigma\omega A^{(0)}(P) = \varkappa\lambda A^{(1)}(P)\,,$$

wobei $A^{(1)}$ als gegebene für $\lambda \to \infty$ beschränkte Funktion anzusehen ist, während $\varkappa$ bei vorgegebener Konstante W durch die Gleichung

$$(46) \qquad \int_{\mathfrak{B}} |I(\Pi)|^2\,d\Pi = W$$

bestimmt wird. Wenn $A^{(1)}(P)$ nicht identisch verschwindet, so verschwindet auch $\int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\,A^{(1)}(\Pi)\,d\Pi$ nicht identisch, da dies Integral ja der Gleichung $\Delta u + k^2 u = -A^{(1)}$ genügt. Darüber hinaus machen wir die Voraussetzung

$$(47) \qquad \int_{\mathfrak{B}}\int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\,A^{(1)}(\Pi)\,d\Pi\,dP \neq 0\,.$$

Wir wollen nun zeigen, daß bei genügend großer Leitfähigkeit σ Skineffekt eintritt. Wie man unter Beachtung von (43), (45), (38), (20), (16) und (6) ohne weiteres

einsieht, genügt es hierzu zu zeigen, daß $\varkappa$ für $\sigma \to \infty$ beschränkt ist. Zu diesem Zweck setzen wir

$$I(P) = \varkappa v(P) .$$

Dann wird nach (10) und (45)

$$(48) \qquad v(P) - \lambda \int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, v(\Pi) = -\lambda A^{(1)}(P)$$

und nach (46)

$$|\varkappa|^2 = W : \int_{\mathfrak{B}} |v(\Pi)|^2\, d\Pi .$$

Die Beschränktheit von $\varkappa$ ist also bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß $\int_{\mathfrak{B}} |v|^2\, d\Pi$ für $\sigma \to \infty$ oberhalb einer festen Schranke bleibt [15]). Um diesen Nachweis zu erbringen, betrachten wir zunächst die Integralgleichung

$$(49) \qquad V(P) - \lambda \int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, V(\Pi)\, d\Pi = -\lambda \int_{\mathfrak{B}} K^{(2)}(P, \Pi)\, \psi(\Pi)\, d\Pi ,$$

wo $\psi(\Pi)$ eine gegebene stetige für $\sigma \to \infty$ beschränkte Funktion und

$$K^{(2)}(P, \Pi) = \int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi')\, K(\Pi', \Pi)\, d\Pi'$$

der iterierte Kern von K ist. Wir behaupten nun zunächst

$$(50) \qquad \lim_{\sigma \to \infty} \int_{\mathfrak{B}} V(\Pi)\, d\Pi = \iint_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, \psi(\Pi)\, dP\, d\Pi .$$

Beweis. Die Differenz $w(P) = V(P) - \int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, \psi(\Pi)\, d\Pi$ genügt nach (49) der Integralgleichung

$$w(P) - \lambda \int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, w(\Pi)\, d\Pi = -\int_{\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, \psi(\Pi)\, d\Pi .$$

Aus dieser folgt nun, wenn ψ_1, ψ_2 und w_1, w_2 Real- bzw. Imaginärteil von ψ und w sind,

$$(51) \quad k \int_{\mathfrak{C}_1} (w_1^2 + w_2^2)\, ds + O\left(\frac{1}{R}\right) + 4\pi\sigma\omega\mu \int_{\mathfrak{B}} (w_1^2 + w_2^2)\, d\Pi = \int_{\mathfrak{B}} (\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1)\, d\Pi$$

wenn $\mathfrak{C}_1$, R und k die frühere Bedeutung (S. 220 unten u. Gl. (7)) haben. Den Nachweis hierfür können wir übergehen, da er fast wörtlich derselbe ist wie der, auf Grund dessen Gleichung (32) aus der Integralgleichung (28) folgte. Aus (51) folgt nun

$$4\pi\,\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} (w_1^2 + w_2^2)\, d\Pi \leqq \int_{\mathfrak{B}} |\psi_1 w_2|\, d\Pi + \int_{\mathfrak{B}} |\psi_2 w_1|\, d\Pi$$

und hieraus unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung

$$(52) \qquad 4\pi\,\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} |w|^2\, d\Pi \leqq M \left\{ \sqrt{\int_{\mathfrak{B}} w_1^2 d\Pi} + \sqrt{\int_{\mathfrak{B}} w_2^2 d\Pi} \right\} ,$$

wenn M^2 eine obere Schranke für $\int_{\mathfrak{B}} \psi_1^2 d\Pi$ und $\int_{\mathfrak{B}} \psi_2^2 d\Pi$ ist. Aus dieser Ungleichung ergibt sich aber

$$(53) \qquad \int_{\mathfrak{B}} |w|^2\, d\Pi \leqq \frac{M}{2\pi\,\omega\sigma\mu} ,$$

---

[15]) Das ist von vornherein keineswegs selbstverständlich. In jedem inneren Punkt P_0 von $\mathfrak{B}$ geht nämlich $v(P_0)$ für $\sigma \to \infty$ stärker als jede Potenz von σ gegen 0. Das folgt aus (48) in der gleichen Weise, in der (44) aus (10) folgte.

sobald

$$4\pi\omega\sigma\mu \geqq 2M. \tag{54}$$

Sind nämlich für einen σ-Wert $\int_{\mathfrak{B}} w_1^2 d\Pi$ und $\int_{\mathfrak{B}} w_2^2 d\Pi$ beide $\leqq 1$, so ist (53) auf Grund von (52) gewiß richtig. Für ein σ, das (54) genügt, kann es aber nicht eintreten, daß die genannten Integrale beide oder eins von ihnen > 1 ist. Im ersteren Falle wäre nämlich nach (52)

$$4\pi\sigma\omega\mu \int_{\mathfrak{B}} |w|^2 d\Pi < M\left\{\int_{\mathfrak{B}} w_1^2 d\Pi + \int_{\mathfrak{B}} w_2^2 d\Pi\right\} = M \int_{\mathfrak{B}} |w|^2 d\Pi,$$

also $4\pi\sigma\omega\mu < M$; im zweiten aber wäre, wenn etwa $\int_{\mathfrak{B}} w_2^2 d\Pi \leqq 1 < \int_{\mathfrak{B}} w_1^2 d\Pi$ ist, ebenfalls nach (52)

$$4\pi\omega\sigma\mu \int_{\mathfrak{B}} w_1^2 d\Pi < M\left\{\int_{\mathfrak{B}} w_1^2 d\Pi + 1\right\} < 2M \int_{\mathfrak{B}} w_1^2 d\Pi,$$

also $4\pi\omega\sigma\mu < 2M$.

Aus (53) folgt aber unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung sofort

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int_{\mathfrak{B}} |w| d\Pi = 0,$$

d. h. nach Definition von w die Behauptung (50).

Multipliziert man nunmehr (48) mit $K^{(2)}(P, \Pi)$ und integriert über P, so sieht man, daß

$$V(P) = \int_{\mathfrak{B}} K^{(2)}(P, \Pi)\, v(\Pi)\, d\Pi$$

der Integralgleichung (49) mit $\psi = A^{(1)}$ genügt, also (50) mit $\psi = A^{(1)}$ erfüllt. Andrerseits ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$|V(P)|^2 \leqq \int_{\mathfrak{B}} |K^{(2)}(P, \Pi)|^2 d\Pi \int_{\mathfrak{B}} |v(\Pi)|^2 d\Pi,$$

also

$$\left|\int_{\mathfrak{B}} V d\Pi\right|^2 \leqq \mathfrak{B} \int_{\mathfrak{B}} |V(P)|^2 dP \leqq \mathfrak{B} \iint_{\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}} |K^{(2)}(P, \Pi)|^2 d\Pi\, dP \cdot \int_{\mathfrak{B}} |v(\Pi)|^2 d\Pi,$$

sodaß aus (50) mit $\psi = A^{(1)}$

$$\left|\iint_{\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}} K(P, \Pi)\, A^{(1)}(\Pi)\, d\Pi\, dP\right|^2 \leqq \mathfrak{B} \iint_{\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}} |K^{(2)}(P, \Pi)|^2 d\Pi\, dP \cdot \liminf_{\sigma\to\infty} \int_{\mathfrak{B}} |v(\Pi)|^2 d\Pi$$

folgt. Wegen (47) ist damit gezeigt, daß $\int_{\mathfrak{B}} |v(\Pi)|^2 d\Pi$ für $\sigma \to \infty$ oberhalb einer festen Schranke bleibt. Nach dem zu Beginn dieses Paragraphen Gesagten ist damit alles bewiesen.

Eingegangen 9. April 1933.

Zur Fermatschen Vermutung.

Von *Otto Grün* in Berlin.

Bezeichnungen: l eine irreguläre Primzahl, ζ eine primitive l-te Einheitswurzel, $k = k(\zeta)$, k_0 der größte reelle Teilkörper von k, r eine rationale Primitivzahl nach l, s eine erzeugende Substitution von k, d. h. $\zeta^s = \zeta^r$, s_0 eine k relativ zu k_0 erzeugende Substitution, also $\zeta^{s_0} = \zeta^{-1}$, B_i die i-te Bernoullische Zahl, definiert durch die symbolischen Gleichungen $(B+1)^n - B_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Es soll bewiesen werden:

Wenn die Klassenzahl von k_0 prim zu l und keine Bernoullische Zahl $B_i \equiv 0 \bmod l^3$ für $i = 2, 4, \ldots, l-3$ ist, so ist die Gleichung

$$E(\zeta - \zeta^{-1})^m \alpha_1^l + \alpha_2^l + \alpha_3^l = 0$$

in ganzen zu l primen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus k_0 unlösbar, wenn $m \geqq 3l-1$ und E eine Einheit aus k_0 ist.

I. (Hilfssätze.)

A) *Ein Kummerscher Körper $K = K(\sqrt[l]{\alpha})$ über k, also mit α aus k, hat immer dann und nur dann einen über k_0 vom l-ten Grade zyklischen Unterkörper K_0, wenn $\alpha^{1+s_0} = \alpha_1^l$ in k gilt.* (Auf diese Tatsache machte mich Herr Hasse freundlicherweise aufmerksam.)

Beweis: Das ergibt sich analog zu Hilbert, Zahlbericht, Satz 147, indem man die Vertauschbarkeit der erzeugenden Substitution $\sqrt[l]{\alpha} \to \zeta\sqrt[l]{\alpha}$, $\zeta \to \zeta$ von K/k mit der erzeugenden Substitution $\alpha \to \alpha^{s_0}$, $\zeta \to \zeta^{-1}$ von k/k_0 ausdrückt.

B) *Es sei in k: $(\alpha) = \mathfrak{a}^l$ eine l-te Idealpotenz und $\alpha \equiv a \bmod l$ mit rationalem a. Wenn dann die Klassenzahl von k_0 prim zu l ist, muß α l-te Hauptidealpotenz, also $\mathfrak{a} \sim 1$ in k sein.*

Beweis: Aus $\alpha \equiv a \bmod l$ folgt auch $\alpha \equiv a' \bmod (1-\zeta)^l$ mit rationalem a', und daher:

$$\alpha^{1-s_0} \equiv 1 \bmod (1-\zeta)^l. \tag{1}$$

Ist nun α^{1-s_0} eine l-te Hauptidealpotenz in k, so hat man:

$$(\alpha^{1-s_0}) = (\beta)^l, \text{ also}$$

$$(\alpha)^2 = (\beta)^l \cdot (\alpha^{1+s_0}) = (\beta)^l \cdot (\mathfrak{a}^{1+s_0})^l. \tag{2}$$

Offenbar muß hier die rechte Seite l-te Hauptidealpotenz in k sein, denn $\mathfrak{a}^l = (\alpha) \sim 1$ (in k, also $(\mathfrak{a}^{1+s_0})^l = (\alpha^{1+s_0}) \sim 1$ in k_0; da aber die Klassenzahl von k_0 prim zu l ist, folgt $\mathfrak{a}^{1+s_0} \sim 1$ in k_0. Daher ist die linke Seite von (2) l-te Hauptidealpotenz in k, also auch α.

Wäre aber α^{1-s_0} nicht l-te Potenz eines Hauptideals in k, so wäre der durch $\sqrt[l]{\alpha^{1-s_0}}$ über k erzeugte Körper K ein echter Kummerscher Körper, und zwar hätte K/k wegen

der Kongruenz (1), und weil α l-te Idealpotenz in k ist, die Relativdiskriminante 1. Ferner ist $(\alpha^{1-s_0})^{1+s_0} = 1$, also hätte K nach A) einen Unterkörper K_0, zyklisch vom l-ten Grade über k_0. Auch die Relativdiskriminante K_0/k_0 müßte gleich 1 sein, wenn die von K/k den Wert 1 hat. Dann wäre aber die Klassenzahl von k_0 durch l teilbar (Hilbert, Zahlbericht, Satz 94). Das widerspricht der Voraussetzung. Also ist notwendig α l-te Potenz eines Hauptideals in k.

C) *Wenn die Klassenzahl von k_0 prim zu l und keine der Bernoullischen Zahlen $B_i \equiv 0 \bmod l^3$ für $i = 2, 4, \ldots, l-3$ ist, so ist jede Einheit aus k_0, die einer rationalen Zahl nach l^2 kongruent ist, l-te Potenz einer Einheit aus k_0.*

Beweis: Für die Einheit ε aus k_0 gelte:

$$\varepsilon \equiv a \bmod l^2, \quad a \text{ rational.}$$

Ferner sei $e = (\zeta - \zeta^{-1})^{1-s}$. Dann gibt es eine ganze rationale und, weil die Klassenzahl von k_0 nicht durch l teilbar ist, zu l prime Zahl n so, daß

$$\varepsilon^n = e^{\varphi(s)}$$

ist, wobei $\varphi(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{\frac{l-5}{2}} s^{\frac{l-5}{2}}$ mit ganzen rationalen $a_0, a_1, \ldots$ ist. Daraus folgt:

$$e^{(1-s)\varphi(s)} \equiv 1 \bmod l^2. \tag{3}$$

Nimmt man die Kummerschen logarithmischen Differentialquotienten mod l^2, so hat man aus (3):

$$\frac{B_{2i\,l}}{2i\,l}(1 - r^{2i\,l})\ \varphi(r^{2i\,l}) \equiv 0 \bmod l^2 \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right).$$

Also ist wegen $B_{2i\,l} \not\equiv 0 \bmod l^3$:

$$\varphi(r^{2i}) \equiv 0 \bmod l \text{ für } i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}.$$

Da $\varphi(x)$ vom Grade $\frac{l-5}{2}$ und r Primitivzahl nach l ist, bedeutet diese Kongruenz, daß in $\varphi(x)$ alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{\frac{l-5}{2}}$ durch l teilbar sind; also ist ε^n und daher auch ε l-te Potenz einer Einheit aus k_0, w. z. b. w.

II.

Es wird jetzt durchweg vorausgesetzt:

1. Die Klassenzahl von k_0 ist prim zu l.
2. Es gilt: $B_i \not\equiv 0 \bmod l^3$ für $i = 2, 4, \ldots, l-3$.

Angenommen, es bestehe die Gleichung:

$$E(\zeta - \zeta^{-1})^m \alpha_1^l + \alpha_2^l + \alpha_3^l = 0 \tag{1}$$

in ganzen zu l primen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus k_0 mit $m > 3l-1$ und einer Einheit E aus k_0.

Dann ist:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{(\zeta - \zeta^{-1})^{m+1-l}} = \varepsilon_0 \beta_0^l, \tag{2}$$

$$\frac{\alpha_2 \zeta^\iota + \alpha_3 \zeta^{-\iota}}{\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}} = \varepsilon_\iota \beta_\iota^l \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, l-1),$$

wobei β_0, β_ι Zahlen aus k, $\varepsilon_0, \varepsilon_\iota$ Einheiten aus k_0 sind. Für die erste der Gleichungen (2)

folgt dies aus der Tatsache, daß $\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{(\zeta - \zeta^{-1})^{m+1-l}}$ eine in k_0 gelegene l-te Idealpotenz sein muß. Die übrigen Gleichungen (2) beweist man so:

Es ist:

$$\frac{\alpha_2\zeta^\iota + \alpha_3\zeta^{-\iota}}{\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}} = \beta = l\text{-te Idealpotenz in } k,$$

$$\beta^{1-s_0} = -\frac{\alpha_2\zeta^\iota + \alpha_3\zeta^{-\iota}}{\alpha_2\zeta^{-\iota} + \alpha_3\zeta^\iota} = -\frac{\alpha_2(\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}) + (\alpha_2 + \alpha_3)\zeta^{-\iota}}{\alpha_2(\zeta^{-\iota} - \zeta^\iota) + (\alpha_2 + \alpha_3)\zeta^\iota} \equiv 1 \bmod (\zeta - \zeta^{-1})^{m-l}$$
$$\equiv 1 \bmod l^2.$$

Also ist nach I, B) β^{1-s_0} eine l-te Hauptidealpotenz. Nun folgt auf dieselbe Art, wie in I, B), daß auch β eine l-te Hauptidealpotenz sein muß. Die Gleichungen (2) sind damit erwiesen. Ferner ist:

$$\left(\frac{\alpha_2\zeta^\iota + \alpha_3\zeta^{-\iota}}{\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}}\right)^{s_0} = \frac{\alpha_2\zeta^{-\iota} + \alpha_3\zeta^\iota}{\zeta^{-\iota} - \zeta^\iota},$$

also:

$$(3) \qquad (\varepsilon_\iota\beta_\iota^l)^{s_0} = \varepsilon_{l-\iota}\,\beta_{l-\iota}^l.$$

Es ist also $\frac{\varepsilon_\iota}{\varepsilon_{l-\iota}} = \eta^l$ (η reelle Einheit). Daher darf man in (2) für $\iota = 1, \ldots, \frac{l-1}{2}$ $\varepsilon_{l-\iota} = \varepsilon_\iota$ setzen und hat dann $\beta_{l-\iota}^l = \beta_\iota^{ls_0}$.

Daher ergibt sich aus (2) und (3):

$$(4) \quad \varepsilon_\iota(\beta_\iota^l - \beta_{l-\iota}^l) = (\alpha_2 + \alpha_3)\frac{\zeta^\iota + \zeta^{-\iota}}{\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}} = \varepsilon_0\beta_0^l \cdot (\zeta - \zeta^{-1})^{m+1-l} \cdot \frac{\zeta^\iota + \zeta^{-\iota}}{\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}}$$
$$= \varepsilon_0 \cdot (\zeta^\iota + \zeta^{-\iota}) \cdot \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}} \cdot (\zeta - \zeta^{-1})^{m-l} \cdot \beta_0^l$$
$$= e_0 \cdot (\zeta - \zeta^{-1})^{m-l} \cdot \beta_0^l, \qquad e_0 \text{ Einheit aus } k_0.$$

Wenn man mit β_ι resp. $\beta_{l-\iota}$ die durch die Kongruenz

$$(5) \qquad \beta_\iota - \beta_{l-\iota} \equiv 0 \bmod (\zeta - \zeta^{-1})^{m+1-2l}$$

verbundenen Werte bezeichnet, so folgt aus (4):

$$(6) \quad \frac{\beta_\iota\zeta^\varkappa - \beta_{l-\iota}\zeta^{-\varkappa}}{\zeta^\varkappa - \zeta^{-\varkappa}} = \eta_{\iota,\varkappa}\,\gamma_{\iota,\varkappa}^l \begin{pmatrix}\iota = 1, 2, \ldots, l-1\\ \varkappa = 1, 2, \ldots, l-1\end{pmatrix}, \quad \eta_{\iota,\varkappa} \text{ Einheiten aus } k_0.$$

Denn die linke Seite ist nach (4) eine l-te Idealpotenz, die nach (3) und (5) durch s_0 nicht geändert wird, also in k_0 liegt und daher l-te Potenz eines Hauptideals ist.

Aus (5) und (6) hat man:

$\beta_\iota \equiv \eta_{\iota,\varkappa}\gamma_{\iota,\varkappa}^l \bmod (\zeta - \zeta^{-1})^{m-2l}$, also auch mod l, und daher:

$$(7) \qquad \beta_\iota^l \equiv \eta_{\iota,\varkappa}^l\gamma_{\iota,\varkappa}^{l^2} \bmod l^2.$$

Setzt man (7) in die Gleichungen (2) ein, so folgt:

$$\frac{\alpha_2\zeta^\iota + \alpha_3\zeta^{-\iota}}{\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}} \equiv \varepsilon_\iota\,\eta_{\iota,\varkappa}^l\gamma_{\iota,\varkappa}^{l^2} \bmod l^2,$$

$$\frac{\alpha_2\zeta + \alpha_3\zeta^{-1}}{\zeta - \zeta^{-1}} \equiv \varepsilon_1\,\eta_{1,\varkappa}^l\gamma_{1,\varkappa}^{l^2} \bmod l^2.$$

Hieraus ergibt sich sofort (durch Division):

$$1 \equiv \frac{\varepsilon_\iota}{\varepsilon_1}\left(\frac{\eta_{\iota,\varkappa}}{\eta_{1,\varkappa}}\right)^l\left(\frac{\gamma_{\iota,\varkappa}}{\gamma_{1,\varkappa}}\right)^{l^3} \bmod l^2,$$

und nun folgt leicht aus I, C), daß $\frac{\varepsilon_\iota}{\varepsilon_1} = \eta_\iota^l =$ l-te Potenz einer Einheit aus k_0 sein muß. Dann nehmen die Gleichungen (2) die Form an:

$$(8) \qquad \alpha_2\zeta^\iota + \alpha_3\zeta^{-\iota} = \varepsilon_1\eta_\iota^l\beta_\iota^l(\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}) = \varepsilon_1\beta_\iota^l(\zeta^\iota - \zeta^{-\iota}),$$

indem man der Einfachheit wegen für $\eta_\iota^l\beta_\iota^l$ wieder die Bezeichnung β_ι^l setzt.

Nun ist weiter:

$$(\alpha_2\zeta^\iota + \alpha_3\zeta^{-\iota})(\alpha_2\zeta^{-\iota} + \alpha_3\zeta^\iota) = (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + (\zeta^\iota - \zeta^{-\iota})^2\alpha_2\alpha_3,$$

also, unter Berücksichtigung von Gleichung (8):

$$(\alpha_2 + \alpha_3)^2\frac{1}{(\zeta^\iota - \zeta^{-\iota})^2} + \alpha_2\alpha_2 = -\varepsilon_1^2\beta_\iota^{l(1+s_0)}\left(\iota = 1, 2, \ldots, \frac{l-1}{2}\right).$$

Setzt man etwa $\iota = 1$ und $\iota = 2$, so folgt:

$$(\alpha_2 + \alpha_3)^2\left(\frac{1}{(\zeta - \zeta^{-1})^2} - \frac{1}{(\zeta^2 - \zeta^{-2})^2}\right) = \varepsilon_1^2(\beta_2^{l(1+s_0)} - \beta_1^{l(1+s_0)})$$

und hieraus nach der ersten Gleichung (2):

$$(9) \qquad \varepsilon_0^2\beta_0^{2l}(\zeta - \zeta^{-1})^{2m-2l}\left(1 - \frac{1}{(\zeta + \zeta^{-1})}\right) = \varepsilon_1^2(\beta_2^{(1+s_0)l} - \beta_1^{(1+s_0)l}).$$

Hierin erweist sich $1 - \frac{1}{(\zeta + \zeta^{-1})^2}$ als eine reelle Einheit. Man kann also Gleichung (9) auf die Form bringen:

$$(10) \qquad E_0(\zeta - \zeta^{-1})^{2m-2l}\beta_0^{2l} + \beta_1^{(1+s_0)l} + (-\beta_2^{1+s_0})^l = 0.$$

Da $\beta_0, \beta_1^{1+s_0}, -\beta_2^{1+s_0}$ in k_0 liegen, E_0 eine reelle Einheit und $2m - 2l > 3l - 1$ wegen $m \geqq 3l - 1$ ist, hat diese Gleichung dieselbe Form wie die Ausgangsgleichung (1), wir könnten also das obige Verfahren wieder auf sie anwenden und würden aus ihr eine weitere Gleichung derselben Form erhalten:

$$(11) \qquad E_0'(\zeta - \zeta^{-1})^{4m-6l}\beta_0'^{2l} + \beta_1'^{(1+s_0)l} + \beta_2'^{(1+s_0)l} = 0,$$

usw. Die Kette der so entstehenden Gleichungen kann offenbar nie abbrechen.

Nun enthält aber β_0 weniger verschiedene Primteiler als α_1, denn es ist $\beta_0 = (\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3)$; ebenso enthält in (11) β_0' weniger voneinander verschiedene Primteiler als β_0; dasselbe folgt für jede so abgeleitete Gleichung mit Bezug auf die vorhergehende. Also müßte α_1 unendlich viele Primteiler enthalten, d. h. 0 sein, während α_1 doch prim zu l vorausgesetzt war.

Die Gleichung (1) ist also in zu l primen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus k_0 unlösbar, w. z. b. w.

Spezialisiert man auf den rationalen Fall, so folgt:

Die Gleichung $x^l + y^l + z^l = 0$ ist in rationalen Zahlen x, y, z mit $xyz \equiv 0 \bmod l$ und $xyz \not\equiv 0$ für $l > 3$ unlösbar, wenn die Klassenzahl von k_0 prim zu l und keine der Bernoullischen Zahlen $B_{il} \equiv 0 \bmod l^3$ für $i = 2, 4, \ldots, l-3$ ist. Es können dabei beliebig viele Bernoullische Zahlen $B_i \equiv 0 \bmod l$ für $i = 2, 4, \ldots, l-3$ sein.

Eingegangen 17. Mai 1933.

Über den Beweis des Hauptidealsatzes.

Von *Wilhelm Magnus* in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Im folgenden soll eine neue Herleitung des von Furtwängler [1]) bewiesenen Satzes über gewisse zweistufig metabelsche Gruppen gegeben werden. Es werden dabei von Reidemeister und Schreier angegebene Sätze benutzt, die zugeschnitten sind auf Gruppen, welche mit Hilfe von erzeugenden Elementen definiert sind, und außerdem wird von einer Darstellung gewisser „allgemeinster" unendlicher zweistufig metabelscher Gruppen durch ganze lineare Substitutionen einer Variabeln mit Parametern in den Koëffizienten Gebrauch gemacht. Dabei sind im Grunde die benutzten Hilfsmittel gar nicht allzusehr von denen Furtwänglers verschieden; es werden aber jedenfalls nicht unbeträchtliche Vereinfachungen der formalen Rechnungen erzielt, und es ist vielleicht zu hoffen, daß dies die wünschenswerte Einordnung des in Rede stehenden merkwürdigen Satzes in einen größeren Zusammenhang etwas erleichtern könnte. — Die Bezeichnungen schließen sich nach Möglichkeit an die von Furtwängler benutzten an.

Ansatz: Wir gehen aus von der aus n freien Erzeugenden $S_1, S_2, \ldots, S_n$ gebildeten Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ und bilden die kleinste invariante Untergruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$, die die Elemente $S_1^{e_1}, S_2^{e_2}, \ldots, S_n^{e_n}$ und $S_{ik} \equiv S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1}$ enthält. Diese wird jedenfalls von den sämtlichen Transformierten der S_{ik} und $S_i^{e_i}$ erzeugt, und besitzt im übrigen nach O. Schreier [2]) $1 + (n-1)e_1 e_2 \cdots e_n$ freie Erzeugende, da $\overline{\mathfrak{A}}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ den Index $j = e_1 e_2 \cdots e_n$ besitzt; $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$ ist nämlich offensichtlich eine abelsche Gruppe und das direkte Produkt von n zyklischen Gruppen der Ordnungen $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Über die Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ soll übrigens nur die Voraussetzung gemacht werden, daß sie natürliche Zahlen sind; sie brauchen keine Primzahlpotenzen zu sein. Man sieht sehr leicht, daß man als Erzeugende von $\overline{\mathfrak{A}}$ außer $S_1^{e_1}, S_2^{e_2}, \ldots, S_n^{e_n}$ noch $1 + (n-1)j - n$ Elemente der Kommutatorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}'$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ benutzen kann; man kann dies z. B. nachweisen, indem man mit Hilfe des von Reidemeister [3]) angegebenen Verfahrens Erzeugende für $\overline{\mathfrak{A}}$ aufstellt; dabei stellt sich heraus, daß die Elemente $S_i^{e_i}$ als Erzeugende von $\overline{\mathfrak{A}}$ auftreten, und daß alle anderen Erzeugenden durch Multiplikation mit einem Element $S_i^{-e_i} (i = 1, 2, \ldots, n)$ in Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}'$ verwandelt werden können.

---

[1]) Ph. Furtwängler, Beweis des Hauptidealsatzes für den Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), S. 14—36.

[2]) Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), S. 179.

[3]) Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), S. 7.

I. Die Kommutatorgruppe $\overline{\mathfrak{A}}'$ von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist invariante Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$, denn transformiert man $\overline{\mathfrak{A}}$ mit einem Element aus $\overline{\mathfrak{G}}$, so erhält man dadurch einen Automorphismus von $\overline{\mathfrak{A}}$, bei welchem $\overline{\mathfrak{A}}'$ als charakteristische Untergruppe von $\overline{\mathfrak{A}}$ in sich übergehen muß. Wir erhalten also: $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}'$ *ist eine zweistufig-metabelsche Gruppe; sie besitzt eine invariante freie abelsche Untergruppe* $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{A}}'$ *von* $1 + (n-1)j$ *Erzeugenden.* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ *ist isomorph mit* $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$. $\mathfrak{A}$ *enthält die Kommutatorgruppe* $\mathfrak{G}'$ *von* $\mathfrak{G}$ *und ist das direkte Produkt von* $\mathfrak{G}'$ *und der von den* n *unabhängigen Elementen* $S_i^{e_i}$ *erzeugten freien abelschen Gruppe. Jede Gruppe von* n *Erzeugenden* $S_1, S_2, \ldots, S_n$, *für die die kleinste, die Elemente* $S_i^{e_i}$ und $S_{ik} \equiv S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1}$ *enthaltende invariante Untergruppe abelsch ist, ist Faktorgruppe von* $\mathfrak{G}$, *denn es müssen in ihr mindestens die zur Definition von* $\mathfrak{G}$ *gewählten Relationen erfüllt sein.*

II. Jedes Element von $\mathfrak{G}$ läßt sich eindeutig in der Form $G = S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n} A$ mit $0 \leqq \alpha_i < e_i$ schreiben, wobei A ein geeignetes Element aus $\mathfrak{A}$ ist. Ist ferner A_1 ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}$, so ist $GA_1G^{-1} = S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n} A_1 S_n^{-\alpha_n} \cdots S_2^{-\alpha_2} S_1^{-\alpha_1}$, und wenn wir hierfür $A^{S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n}}$ schreiben, so gelten für diese symbolische Schreibweise alle bei Furtwängler abgeleiteten Regeln; sind insbesondere $B_1 = S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \cdots S_n^{\alpha_n}$, $B_2 = S_1^{\beta_1} S_2^{\beta_2} \cdots S_n^{\beta_n}$, $B_3 = S_1^{\gamma_1} S_2^{\gamma_2} \cdots S_n^{\gamma_n}$ drei Elemente aus $\mathfrak{B}$, so gilt

$$A_1^{B_1} A_1^{B_2} = A_1^{B_1+B_2} = A_1^{B_2+B_1}, \quad (A_1^{B_1})^{B_2} = A_1^{B_1 B_2} = A_1^{B_2 B_1}, \quad A_1^{B_3(B_1+B_2)} = A_1^{B_1 B_3 + B_2 B_3}.$$

Der Beweis des Hauptidealsatzes läuft nun offenbar auf den Nachweis der folgenden Tatsache heraus:

Es sind $L_i = S_i^{e_i} \Gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n *Elemente aus* $\mathfrak{A}$, *derart, daß, wenn die* Γ_i *sämtlich in* $\mathfrak{G}'$ *liegen, sich die Elemente* $S_i^{e_i f_1 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_n} = T_i$ *mit* $f_i = 1 + S_i + \cdots + S_i^{e_i - 1}$ *aus symbolischen Potenzen der* L_i *zusammensetzen lassen.* In der Tat folgt hieraus sofort, daß die Relationen $L_i = 1$, zu den Relationen von $\mathfrak{G}$ hinzugefügt, die Relationen $T_i = 1$ zur Folge haben. (Nach einem Satz von Dyck [4]) gilt übrigens auch das Umgekehrte: Wenn $T_i = 1$ aus $L_i = 1$ folgt, sind die T_i aus Transformierten der L_i zusammensetzbar; das wird hier aber nicht gebraucht.)

III. Um diese Behauptung zu beweisen, kann man von der Tatsache ausgehen, daß eine beliebige Gruppe von ebenen Bewegungen stets eine abelsche Kommutatorgruppe besitzt. Dies führt darauf, unsere Gruppe $\mathfrak{G}$ in der folgenden Weise durch lineare Substitutionen einer Variabeln z darzustellen:

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien unabhängige Variable. Man ordne dem Element S_i von $\mathfrak{G}$ die Substitution

$$z' = t_i z + a_i \tag{1}$$

der Variablen z zu. Die betreffende Substitution (deren Koëffizienten also keine Zahlen, sondern Parameter sind) heiße s_i. Es wird dann behauptet:

Nimmt man alle aus den Substitutionen (1) *zusammensetzbaren Substitutionen nach dem Modul* $\mathfrak{M} = \{t_1^{e_1} - 1, t_2^{e_2} - 1, \ldots, t_n^{e_n} - 1\}$, *so ist die so entstehende Gruppe* $\mathfrak{g}$ *einstufig isomorph mit* $\mathfrak{G}$, *wenn man die Zuordnung der Elemente von* $\mathfrak{g}$ *zu denen von* $\mathfrak{G}$ *so trifft, daß* s_i *dem Element* S_i *zugeordnet wird. Die Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{G}$ *wird dabei von denjenigen Substitutionen gebildet, die* mod. $\mathfrak{M}$ *einer Substitution* $z' = z + c$ *kongruent sind* (c *hängt von den* a_i *und* t_i *ab*).

---

[4]) Math. Ann. **22** (1883), S. 76/77. Vgl. auch Schreier, l. c. [2]), S. 170/171.

Beweis: Die von den mod. $\mathfrak{M}$ einer Substitution $z' = z + c$ kongruenten Substitutionen gebildete Gruppe heiße $\mathfrak{a}$. Offenbar ist $\mathfrak{a}$ invariant in $\mathfrak{g}$, und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ist isomorph mit $\mathfrak{B}$. Das folgt sofort aus

$$(2) \qquad s_i^{e_i} = \{z' = t_i^{e_i} z + a_i(1 + t_i + \cdots + t_i^{e_i-1})\}$$

und

$$(3) \qquad s_i s_k s_i^{-1} s_k^{-1} = \{z' = z - a_i(t_k - 1) + a_k(t_i - 1)\},$$

denn diese Beziehungen zeigen, daß $s_i^{e_i}$ und $s_i s_k s_i^{-1} s_k^{-1}$ in $\mathfrak{a}$ liegen, während zugleich keine niedrigere Potenz von s_i als die e_i-te in $\mathfrak{a}$ liegt.

$\mathfrak{a}$ ist offenbar abelsch, nach dem am Schluß von I Gesagten ist $\mathfrak{g}$ also Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$, und wegen der Isomorphie von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ist mithin $\mathfrak{a}$ eine Faktorgruppe von $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ als freie abelsche Gruppe von endlich vielen Erzeugenden mit keiner ihrer echten Faktorgruppen isomorph sein kann, ist mithin die Isomorphie von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{G}$ erwiesen, wenn man zeigen kann, daß $\mathfrak{a}$ eine freie abelsche Gruppe von ebensoviel Erzeugenden wie $\mathfrak{A}$, d. h. von $1 + (n-1)j$ Erzeugenden ist. Um das nachzuweisen, schreibe man zunächst einmal die Gruppe $\mathfrak{a}$ additiv, und ersetze ein beliebiges Element a aus $\mathfrak{a}$, dem die Substitution $z' = z + b$ zugeordnet ist, einfach durch b. Wir schreiben dafür $a \to b$ und also insbesondere

$$(4) \quad s_i^{e_i} \to a_i f_i', \quad (f_i' = 1 + t_i + \cdots + t_i^{e_i-1}); \quad s_i s_k s_i^{-1} s_k^{-1} \to a_i (1 - t_k) - a_k (1 - t_i).$$

Die Schreibweise von Furtwängler mit symbolischen Exponenten läßt sich natürlich auch für die s_i einführen; ist σ ein in $\mathfrak{a}$ gelegenes Kompositum der s_i, so wird, wenn $\sigma \to b$, sofort

$$\sigma^{s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \cdots s_n^{\alpha_n}} \to b t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_n^{\alpha_n}.$$

Sind σ_1 und σ_2 zwei solche Elemente aus $\mathfrak{a}$, und ist $\sigma_1 \to b_1$, $\sigma_2 \to b_2$, so gilt natürlich $\sigma_1 \sigma_2 \to b_1 + b_2$.

Wir können also alle Elemente aus $\mathfrak{a}$ als Linearkombinationen mit ganzen rationalen Koëffizienten aus den Polynomen

$$(5) \qquad a_i f_i' t_1^{\alpha_1} \cdots t_{i-1}^{\alpha_{i-1}} t_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots t_n^{\alpha_n} \qquad \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(6) \qquad \{a_i(1 - t_k) - a_k(1 - t_i)\} t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_n^{\alpha_n} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} (0 \leqq \alpha_i < e_i)$$

darstellen. Es ist zu zeigen, daß sich unter diesen Polynomen (5) und (6) mindestens $1 + (n-1) e_1 e_2 \cdots e_n$ mod. $\mathfrak{M}$ linear unabhängige befinden. (Mehr können es nach dem obenstehenden gewiß nicht sein.) Dann enthält nämlich $\mathfrak{a}$ eine freie abelsche Gruppe von $1 + (n-1)j$ Erzeugenden und ist als Faktorgruppe einer solchen (nämlich von $\mathfrak{A}$) mit dieser, d. h. mit $\mathfrak{A}$ isomorph.

Wir führen den Beweis hierfür durch vollständige Induktion; wir nehmen an, es sei schon erwiesen, daß sich aus den in (5) und (6) enthaltenen, nur aus $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ und $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ bestehenden Polynomen genau $1 + (n-2) e_1 e_2 \cdots e_{n-1}$ mod. $\mathfrak{M}$ linear unabhängige befänden. (Für $n = 3$ ist diese Behauptung sehr leicht nachzuweisen.) Dann sind die $(n-1)(e_n - 1) e_1 e_2 \cdots e_{n-1} + e_1 e_2 \cdots e_{n-1}$ aus (5) und (6) zu bildenden Polynome

$$(7) \qquad a_n f_n' t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \qquad (0 \leqq \alpha_i < e_i),$$

$$(8) \qquad (a_n(1 - t_k) - a_k(1 - t_n)) t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_n^{\alpha_n} \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 \leqq \alpha_k < e_k \\ 0 \leqq \alpha_n < e_n - 1 \end{cases}$$

offenbar untereinander mod. $\mathfrak{M}$ linear unabhängig, und es läßt sich aus ihnen auch keine a_n und t_n nicht mehr enthaltende, nicht identisch verschwindende Linearkombination herstellen. In der Tat läßt sich aus (8) kein ein Glied mit $a_n f_n'$ enthaltendes Polynom kombinieren, und alle aus (8) kombinierbaren, a_n nicht enthaltenden Polynome sind höchstens vom $(e_n - 1)$-ten Grad in t_n und durch $t_n - 1$ teilbar. Wegen

$$(n-1)(e_n-1)e_1e_2\cdots e_{n-1} + e_1e_2\cdots e_{n-1} = (n-1)e_1e_2\cdots e_n + 1 - (1 + (n-2)e_1e_2\cdots e_{n-1})$$

ist also unsere Behauptung bewiesen.

IV. Der Beweis des Hauptidealsatzes läßt sich nach dem unter II Bemerkten nun auf den folgenden Nachweis zurückführen:

Es sei für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$L_i \equiv a_i f_i' + \sum_{\substack{l,k=1 \\ l<k}}^{n} g_{lk}^{(i)} \{a_l(1-t_k) - a_k(1-t_l)\}, \tag{9}$$

wobei die $g_{lk}^{(i)}$ Polynome in den t_i mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Dann lassen sich Polynome Π_{kl} aus $t_1, t_2, \ldots, t_n$ angeben, so daß mod. $\mathfrak{M}$

$$f_1' f_2' \cdots f_n' \cdot a_k = \sum_{l=1}^{n} \Pi_{lk} L_l \tag{10}$$

wird. In der Tat läßt sich ja jedes der in II erwähnten Elemente Γ_i als Produkt symbolischer Potenzen der $S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1}$ schreiben, und es entspricht ihm mithin in unserer Darstellung ein Polynom von der Art der in (9) rechts stehenden Summen, während die linke Seite von (10) das $S_k^{e_k f_1 \cdots f_{k-1} f_{k+1} \cdots f_n}$ zugeordnete Polynom ist. (Man beachte, daß $S_k^{e_k} \to a_k f_k'$!)

Die vorstehende Behauptung wird bewiesen durch explizite Angabe der Π_{lk}. Wir führen zunächst die folgende Variablentransformation durch: Wir setzen

$$a_i \equiv \alpha_i(t_i - 1). \tag{11}$$

Dadurch geht L_i über in

$$\Lambda_i \equiv \alpha_i(t_i^{e_i} - 1) - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l<k}}^{n} (\alpha_l - \alpha_k)(1-t_l)(1-t_k) g_{lk}^{(i)}. \tag{12}$$

Ordnen wir rechts nach den α_k, so wird

$$\Lambda_i \equiv \alpha_i f_i' \Delta_i + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_{ik} \Delta_k, \tag{13}$$

wobei $\Delta_k \equiv t_k - 1$ ist und die P_{ik} gewisse Polynome in den t_k sind, die sich leicht aus den $g_{lk}^{(i)}$ berechnen lassen. Da für $\alpha_l = \alpha_k$ die rechte Seite der obigen Identitäten in $\alpha_i f_i' \Delta_i$ übergeht, so folgt, daß für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} P_{ik} \Delta_k \equiv - P_{ii} \Delta_i \tag{14}$$

ist, identisch in den t_i. Wir fassen nun die Identitäten (13) als ein System von n Gleichungen für die n Größen α_i auf. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 f_1' - \sum_{i \neq 1} P_{1i}\Delta_i, & P_{12}\Delta_2, \ldots, & P_{1n}\Delta_n \\ P_{21}\Delta_1, & \Delta_2 f_2' - \sum_{i \neq 2} P_{2i}\Delta_i, \ldots, & P_{2n}\Delta_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ P_{n1}\Delta_1, & P_{n2}\Delta_2, \ldots, & \Delta_n f_n' - \sum_{i \neq n} P_{ni}\Delta_i \end{vmatrix}$$

dieses Gleichungssystems heiße π, ihre $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten mögen π_{ik} heißen. *Es ist zu beachten, daß wegen* (14) *die Elemente der i-ten Spalte sämtlich durch* Δ_i *teilbar sind.* Wir wollen nun die Beziehung (10) etwa für $k = 1$ beweisen. Dazu lösen wir das System (13) nach α_1 auf, und erhalten:

$$\pi\,\alpha_1 \equiv \sum_{l=1}^{n} \pi_{l1}\,A_l. \tag{15}$$

Wir gehen nun von den α_i wieder zu den a_i über, und erhalten

$$\frac{\pi}{\Delta_1}\,a_1 \equiv \sum_{l=1}^{n} \pi_{l1}\,L_l. \tag{16}$$

Nach dem oben Bemerkten sind die π_{l1} sämtlich durch $\Delta_2\,\Delta_3 \cdots \Delta_n$ teilbar, da sie aus π durch Streichen der l-ten Zeile und der ersten Spalte entstehen. Ferner ist π durch $\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3 \cdots \Delta_n$ teilbar. Division von (16) durch $\Delta_2\,\Delta_3 \cdots \Delta_n$ liefert

$$\frac{\pi}{\Delta_1\,\Delta_2 \cdots \Delta_n}\,a_1 \equiv \sum_{l=1}^{n} \frac{\pi_{l1}}{\Delta_2 \cdots \Delta_n}\,L_l. \tag{17}$$

Dabei sind die Koëffizienten von a_1 und von den L_l wirkliche Polynome in den t_i. Die Polynome $\dfrac{\pi_{l1}}{\Delta_2 \cdots \Delta_n}$ sind nun die oben genannten Π_{l1}; oder, mit anderen Worten, es ist $\dfrac{\pi}{\Delta_1\,\Delta_2 \cdots \Delta_n}$ kongruent $f_1' f_2' \cdots f_n'$ mod. $\mathfrak{M}$, so daß (17) also wirklich die zu beweisende Beziehung (10) für $k = 1$ darstellt. Um dies zu beweisen, entwickle man π nach den Potenzprodukten der Größen f_i'. Setzt man $\Delta_1\Delta_2 \cdots \Delta_n$ kurz gleich Δ, so ist zunächst in $\dfrac{\pi}{\Delta}$ der Koëffizient von $f_1' f_2' \cdots f_n'$ gleich 1. Es wird also

$$\frac{\pi}{\Delta} \equiv f_1' f_2' \cdots f_n' + \frac{1}{\Delta} \sum_{\substack{\varepsilon_i = 0,1 \\ \Sigma \varepsilon_i < n}} f_1'^{\varepsilon_1} f_2'^{\varepsilon_2} \cdots f_n'^{\varepsilon_n}\,\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2} \cdots \Delta_n^{\varepsilon_n}\,Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n},$$

wobei die $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n}$ diejenigen Unterdeterminanten von π sind, die man erhält, wenn man für alle i, für die $\varepsilon_i = 1$ ist, die i-te Zeile und Spalte von π streicht und in der übrigbleibenden Determinante die f_i durch Null ersetzt. Wenn wir zeigen, daß für alle Wertsysteme der ε_i, für die $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i < n$, also nicht alle $\varepsilon_i = 1$ sind,

$$\frac{1}{\Delta}\,f_1'^{\varepsilon_1} f_2'^{\varepsilon_2} \cdots f_n'^{\varepsilon_n}\,\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2} \cdots \Delta_n^{\varepsilon_n} Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n} \equiv 0 \text{ mod. } \mathfrak{M}$$

ist, sind wir fertig. Nun ist zunächst einmal $Q_{0,0,\ldots,0} \equiv 0$; denn ersetzt man in π alle f_i durch Null, und addiert die 2-te bis n-te Spalte zur ersten, so stehen in dieser lauter Nullen, und die Determinante wird identisch Null. Nehmen wir weiterhin etwa an, es seien $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_r = 1$, $\varepsilon_{r+1} = \cdots = \varepsilon_n = 0$, $(r < n)$, was aus Symmetriegründen keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, und bezeichnen wir die zugehörige Größe $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n}$ mit $Q^{(r)}$, so wird

$$\frac{1}{\Delta}\,f_1'^{\varepsilon_1} f_2'^{\varepsilon_2} \cdots f_n'^{\varepsilon_n}\,\Delta_1^{\varepsilon_1}\Delta_2^{\varepsilon_2} \cdots \Delta_n^{\varepsilon_n} Q^{(r)} \equiv \frac{f_1' f_2' \cdots f_r'}{\Delta_{r+1} \cdots \Delta_n} \begin{vmatrix} -\sum_{i \neq r+1} P_{r+1,i}\,\Delta_i, \ldots, P_{r+1,n}\,\Delta_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n,r+1}\,\Delta_{r+1}, \ldots, -\sum_{i \neq n} P_{ni}\,\Delta_i \end{vmatrix},$$

wobei die l-te Spalte der rechtsstehenden Determinante durch Δ_{r+l} teilbar ist. Addiert man die 2-te bis $(n-r)$-te Spalte zur ersten, so stehen in dieser Linearkombinationen

der Größen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$; beispielsweise bekommt man als Element der ersten Zeile und Spalte: $-(P_{r+1,1}\Delta_1 + P_{r+1,2}\Delta_2 + \cdots + P_{r+1,r}\Delta_r)$.

Entwickeln wir also unsere Determinante nach den Elementen der ersten Spalte, so liefert sie ein Polynom, welches eine Linearkombination von $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ ist, und im übrigen durch $\Delta_{r+1}\Delta_{r+2}\cdots\Delta_n$ teilbar ist. Da nun die Δ_i ebenso wie die t_i selber unabhängige Variable sind, so muß unsere Determinante $Q^{(r)}$ auch nach Division mit $\Delta_{r+1}\Delta_{r+2}\cdots\Delta_n$ eine Linearkombination von $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ bleiben. Eine solche Linearkombination wird aber durch Multiplikation mit $f_1' f_2' \cdots f_r'$ in ein Polynom verwandelt, das kongruent Null nach dem Modul $\mathfrak{M}$ ist, und das ist die zu beweisende Behauptung.

Es ist noch anzumerken, daß alle auftretenden Polynome natürlich ganze rationale Koëffizienten besitzen, und daß an diesem Sachverhalt durch die vorgenommenen Divisionen mit Produkten aus den Δ_i nichts geändert werden kann.

Eingegangen 28. September 1933.

Berichtigungen zu meiner Arbeit: Neue Beweise zu den Carmichaelschen Sätzen über die Reihe $\Omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x+n)$.

Von *Ta Li* in München.

Vor kurzem habe ich eine Arbeit über die Reihe $\Omega(x)$ in diesem Journal veröffentlicht, welche einige Fehler enthält. Sie mögen im folgenden verbessert werden.

Die Fußnote 1) ist mißverständlich; sie ist, soweit aus ihr irgendeine Beteiligung der Münchener Herren Dozenten an der Publikation und damit eine Verantwortlichkeit herausgelesen werden kann, zu streichen.

§ 1, Z. 5 ist „$\lim x^{\varepsilon}\sum_{\mu=\varepsilon+1}^{\infty}\frac{a_\mu}{x^\mu}=$“ zu streichen.

§ 1. Der letzte Satz ist zu streichen.

§ 2. Der Satz I ist folgendermaßen zu formulieren:

Satz I: *Für jedes gewöhnliche x, welches der Bedingung $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$ genügt, ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergent abgesehen vom Fall $k=m=1$; in diesem Fall ist sie sicher konvergent, wenn $R(\sigma x) < R(\sigma x_0) - 2$ ist.*

S. 88, Z. 4 von unten muß heißen: „wobei $P_2\left(\frac{1}{n}\right)$ das konstante Glied 1 hat.“

S. 89, Z. 10 statt „$u_n = c_n g(x+n)$“ ist „$u_n = c_n g(x_0+n)$“ zu schreiben.

Z. 13—16 statt „Es gilt daher der Satz II ... Halbebene“ muß stehen: Hieraus folgt durch eine bekannte Schlußweise der

Satz II: *Der Konvergenzbereich von $\Omega(x)$ besteht entweder aus allen gewöhnlichen Punkten oder aus denjenigen, welche einer Halbebene der Gestalt $R(\sigma x) < \gamma$ angehören; über die Konvergenz auf der Grenzgeraden läßt sich allgemein nichts aussagen.*

§ 2, S. 88, Z. 3 v. u. bis S. 89 Z. 3 muß lauten: Für $k \geqq m$ ist $k\mu_k(x-x_0)n^{k-1}\log n$ das maßgebende Glied im Exponenten von (5). Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}|v_n(x)|$ wird daher, falls $k>1$ ist, konvergieren, sobald $R(\mu_k x) < R(\mu_k x_0)$ ist; oder, da in diesem Fall $\sigma=\mu_k$ ist: sobald $R(\sigma x) < R(\sigma x_0)$. Falls aber $k=m=1$ ist, folgt aus (6), daß die Reihe gewiß für $R(\mu_1 x) < R(\mu_1 x_0) - 2$ konvergiert.

Der Rest des § 2 sowie der auf gleichmäßige Konvergenz bezügliche Absatz des § 3 ist zu streichen, da sich die gleichmäßige Konvergenz nicht erzwingen läßt ohne eine weitere Voraussetzung über eine Art Gleichmäßigkeit der asymptotischen Darstellung (1).

§ 4, Z. 2, 3. Die angegebene Stirlingsche Formel ist kein ausreichender Grund dafür, daß $1/\Gamma(x)$ die von $g(x)$ vorausgesetzte Eigenschaft hat; bekanntlich ist aber

$$1/\Gamma(x) \sim x^{-x+\frac{1}{2}}\, e^{x-\frac{1}{2}\log(2\pi)}\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right).$$

Eingegangen 28. Juni 1933.

Zusatz zu meiner Arbeit „Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem“ in Band 165 dieses Journals.

Von *Ludwig Bieberbach* in Berlin.

Auf S. 91 findet sich ein Fehler. Der Beweis dafür, daß es für jedes k Polynome von drei Variabeln gibt, die nicht k-approximierbar sind, ist nicht stichhaltig. Diese mehr auf Flüchtigkeit als auf Unkenntnis beruhende Lücke meiner Beweisführung hat mir Hr. Kamke zur Kenntnis gebracht. Meine Bemühungen, den Schaden auszubessern, haben noch nicht zum Ziele geführt. Indessen habe ich dabei einen Ansatz gefunden, der wohl einige Aussicht hat und den ich auch deshalb hier mitteilen möchte, weil er mit einer anderen auch an sich interessanten Frage zusammenhängt, die anscheinend und merkwürdigerweise bisher nicht behandelt worden ist.

Es ist dies die Frage, ob es Differentialgleichungen (in unserem Falle partielle algebraische Differentialgleichungen) gibt, durch deren Lösungen beliebige stetige Funktionen gleichmäßig approximiert werden können (in den Funktionswerten, nicht auch in den Ableitungen).

Auf den Zusammenhang des Hilbertschen Problems mit dieser Frage führt die folgende Betrachtung:

In Ausgestaltung der Überlegungen des zweiten Absatzes auf S. 91 meiner Arbeit zeigt man, daß jede $\nu \geqq 3k-3$ mal differenzierbare k-Funktion (insbesondere also jedes k-Polynom) einer algebraischen partiellen Differentialgleichung ν-ter Ordnung genügt. Läßt sich dann zeigen, daß sich nicht jede stetige Funktion von drei Variabeln durch Lösungen einer solchen Differentialgleichung gleichmäßig approximieren läßt, so ist damit gezeigt, daß es k-Polynome von drei Variabeln gibt, die nicht k-approximierbar sind. Die Lücke der Beweisführung wäre damit geschlossen.

Eingegangen 29. Oktober 1933.

Inhaltsverzeichnis der Bände 161—170.

	Band	Seite
Adelsberger, H. (*Königsberg i. Pr.*), Über unendliche diskrete Gruppen	163.	103—124
Artin, E. (*Hamburg*), Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper	164.	1—11
— —, Über Einheiten relativ galoisscher Zahlkörper	167.	153—157
— —, Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper	167.	157—159
Baer, R. (*Halle a. S.*), Eine Anwendung der Kontinuumhypothese in der Algebra	162.	132—133
— — und **Hasse, H.** (*Marburg*), Zusammenhang und Dimension topologischer Körperräume	167.	40—45
Bauer, M. (*Budapest*), Über einen Takagischen Satz	163.	249—250
Bell, E. T. (*Pasadena*), Existence theorems on the numbers of representations of odd integers as sums of $4t+2$ squares	163.	65—70
Bergmann, St. (*Berlin*), Über die schlichten Bereiche in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen	162.	256—264
— —, Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I.	169.	1—42
Bieberbach, L. (*Berlin*), Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem	165.	89—92
— —, Zusatz zu vorstehender Arbeit	170.	242
— —, Zur Lehre von den kubischen Konstruktionen	167.	142—146
Blumenthal, O. (*Aachen*), Über rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft	165.	237—246
Bögel, K. (*Halberstadt*), Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen	170.	197—217
Brauer, A. (*Berlin*), Über diophantische Gleichungen der Form $g^2(x,y) - \mu h^2(x,y) = \gamma y^n$	161.	1—13
Brauer, R. (*Königsberg i. Pr.*), Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern	166.	241—252
— —, Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind	168.	44—64
— —, **Hasse, H.** (*Marburg*) und **Noether, E.** (*Göttingen*), Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren	167.	399—404
Breuer, S. (*Karlsruhe i. B.*), Zyklische Minimalbasis zusammengesetzten Grades	166.	54—58
Carathéodory, C. (*München*), Ein dem Vitalischen analoger Satz für analytische Funktionen von mehreren Veränderlichen	165.	180—183
Chevalley, C. (*Paris*), La théorie du symbole de restes normiques	169.	140—157
Courant, R. (*Göttingen*), Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip	165.	247—256
Davenport, H. (*Cambridge*), On certain exponential sums	169.	158—176
Dietrich, R. (*Dresden*), Eine Darstellung des Integrals der Riccatischen Gleichung: $y' + y^2 = f(x)$	169.	252

	Band	Seite
Doetsch, G. (*Freiburg i. Br.*), Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung	167.	274—293
Dubislav, W. (*Berlin*), Elementarer Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Logik-Kalküls	161.	107—112
Emch, A. (*Urbana*), Finite groups and their geometric representation	162.	238—255
Estermann, Th. (*London*), Über die Darstellungen einer Zahl als Differenz von zwei Produkten	164.	173—182
— —, Berichtigung zu vorstehender Arbeit	166.	64
— —, Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunschen Methode	168.	106—116
Evelyn, C. I. A. (*Wotton*) und **Linfoot, E. H.** (*Princeton*), On a problem in the additive theory of numbers (Second paper)	164.	131—140
Fekete, M. (*Jerusalem*), Über den Schottkyschen Satz	165.	217—224
Fladt, K. (*Vaihingen a. F.*), Die Umkehrung der ebenen quadratischen Cremonatransformationen	170.	64—68
Fock, V. (*Leningrad*), Über die konforme Abbildung eines Kreisvierecks mit verschwindenden Winkeln auf eine Halbebene	161.	137—151
Fraenkel, A. (*Kiel*), Axiomatische Theorie der Wohlordnung. (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. III)	167.	1—11
Franz, W. (*Marburg*), Zur Arbeit „Korselt, Einfacher Beweis eines Satzes von Kronecker“	164.	63
Frucht, R. (*Triest*), Über die Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen	166.	16—29
Fueter, R. (*Zürich*), Über eine spezielle Algebra	167.	52—61
Furtwängler, Ph. (*Wien*), Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper	167.	379—387
Gagaeff, B. (*Kasan*), Über Sturm-Liouvillesche Reihen mit Lücken	166.	204—207
Geppert, H. (*Gießen*), Zur Theorie des Borchardtschen Mittels. I	161.	21—40
Grell, H. (*Jena*), Zur Normentheorie in hyperkomplexen Systemen	162.	60—62
Gruder, O. (*Wien*), Über symmetrische Grundfunktionen natürlicher Zahlen	161.	152—178
Grün, O. (*Berlin*), Zur Fermatschen Vermutung	170.	231—234
Grunwald, W. (*Halle a. d. S.*), Ein allgemeines Existenztheorem für algebraische Zahlkörper	169.	103—107
Hammerstein, A. (*Berlin*), Über die Eigenwerte gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen	168.	37—43
Hanke, G. (*Gießen*), Die Bewegung eines schweren Punktes auf den ungleichachsigen Paraboloiden	161.	73—94
Haenzel, G. (*Berlin-Wittenau*), Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung	166.	167—181
— (*Karlsruhe i. B.*), Eine geometrische Konstruktion der transfiniten Zahlen Cantors	170.	123—128
Hardy, G. H. und **Littlewood, I. E.** (*Cambridge*), Some properties of conjugate functions	167.	405—423
Hasse, H. (*Halle a. S.*), Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols	162.	134—144
— —, Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen	162.	145—154
— —, Führer, Diskriminate und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper	162.	169—184
— (*Marburg*), Neue Begründung der komplexen Multiplikation. Zweiter Teil: Aufbau ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie	165.	64—88
— — und **Schmidt, F. K.** (*Erlangen*), Die Struktur diskret bewerteter Körper	170.	4—63
— —, s. Baer, R. und H. Hasse.		
— —, s. Brauer, R., H. Hasse und E. Noether.		

	Band	Seite
Haupt, O. (*Erlangen*), Über die Struktur reeller Kurven	164.	50—60
— —, Über Kontinua von endlicher Relativordnung	167.	20—39
— —, Über die Erweiterung stetiger Abbildungen	168.	129—130
— —, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen	169.	177—185
— —, Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung	170.	154—167
Hausdorff, F. (*Bonn*), Zur Theorie der linearen metrischen Räume	167.	294—311
Haußner, R. (*Jena*), Über die Verteilung von Lücken- und Primzahlen	167.	424—426
— —, Ergänzende Bemerkung zu vorstehender Arbeit	168.	192
Hecke, E. (*Hamburg*), Die Riemannschen Periodenrelationen für die elliptischen Modulfunktionen	167.	337—345
Heegner, K. (*Berlin*), Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt	168.	91—105
Hellerich, J. (*Hamburg*) und **Schmidt, R.** (*Kiel*), Numerische Auswertung von Stieltjesintegralen	164.	243—255
Hensel, K. (*Marburg a. L.*), Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. I. Abhandlung	165.	257—264
— —, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. II. Abhandlung	168.	117—128
— —, Über die Ausführbarkeit der elementaren Rechenoperationen in Ringen von Systemen	169.	67—70
Herbrand, J. (*Paris*), Sur la non-contradiction de l'Arithmétique	166.	1—8
Hesselbach, B. (*Hamm i. W.*), Über die Konstruktion der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung im komplexen Gebiet	169.	108—110
Hopf, E. (*Berlin-Dahlem*), Kleine Bemerkung zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen	165.	50—51
Hopf, H. (*Berlin*), Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten	163.	71—88
— (*Zürich*), Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen	165.	225—236
Hurewicz, W. (*Amsterdam*), Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen	169.	71—78
Iglisch, R. (*Aachen*), Zur Theorie der reellen Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen	164.	151—172
Jacobsthal, E. (*Berlin*), Über das Schwarzsche Lemma	165.	59—63
Jonas, H. (*Berlin-Steglitz*), Simultane Transformationen für gewisse Klassen von Raumkurven	170.	95—106
Jordan, H. (*Wiesbaden*), Eine neue Methode zur Herleitung asymptotischer Ausdrücke in Anwendung auf die Besselschen Funktionen	162.	17—59
Jung, H. (*Göttingen*), Die 2. Greenschen Funktionen als Kerne von homogenen Integralgleichungen zweiter Art	163.	89—102
— —, Die Erzeugung orthogonaler Koordinatensysteme in der Ebene und im Raum durch ein Koordinatenpotential	164.	67—79
— —, Ein Beitrag zur Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mittels Greenscher Funktionen	166.	185—192
Jung, H. W. E. (*Halle a. S.*), Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen. A. Totale Differentiale (Algebraischer Teil)	165.	128—158
— —, — B. Totale Differentiale (Transzendenter Teil)	167.	346—359
— —, — C. Über die Defekte von Klassen	168.	131—169
— —, — D. Doppelintegrale zweiter Gattung	169.	43—60
Kamke, E. (*Tübingen*), Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	161.	194—198
— —, Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung	162.	185—197
— —, Berichtigung zu vorstehender Arbeit	163.	134

	Band	Seite
Karamata, I. (*Belgrad*), Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen	164.	27—39
Kaufmann, B. (*Heidelberg*), Über die Konvexitäts-und Konkavitätsstellen auf Jordankurven	164.	112—127
— —, Über Stützstreckenverteilung und Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsteile	166.	151—166
Keller, O.-H. (*Frankfurt a. M.*), Über die lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln	163.	231—248
— (*Berlin-Charlottenburg*), Cremona-Transformationen algebraischer Kurven	169.	193—218
Kirchhoff, W. (*Braunschweig*), Reduktion simultaner partieller Differentialgleichungen bei hydrodynamischen Problemen	164.	183—195
Klein, F. (*Barmen*), Zur Theorie der Systeme von Potenzproduktkongruenzen	164.	141—150
Koksma, I. F. (*Hilversum, Niederlande*) und **Popken, J.** (*Smilde, Niederlande*), Zur Transzendenz von e^{π}	168.	211—230
Kommerell, K. (*Tübingen*), Über die Zentralachsen eines Büschels von Dynamen und ihre Beziehung zur Flächentheorie	161.	113—122
König, R. (*Jena*) und **Krafft, M.** (*Marburg*), Über Primfunktionen	165.	96—108
— und **Schmidt, H.** (*Jena*), Über Polynom- und allgemeinere Funktionssysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen. II	162.	69—113
Kopff, A. (*Berlin-Dahlem*), Über das systematische Verhalten der Katalogörter der Sterne der 7. bis 9. Größe	165.	93—95
Korselt, A. (*Plauen i. V.*), Einfacher Beweis eines Satzes von Kronecker	164.	61—62
Köthe, G. (*Münster*), Über Schiefkörper mit Unterkörpern zweiter Art über dem Zentrum	166.	182—184
— — und **Toeplitz, O.** (*Bonn*), Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen	165.	116—127
Kowalewski, G. (*Dresden*), Ein neuer Beweis des Euler-Maclaurinschen Theorems	167.	46—51
Krafft, M. (*Marburg a. d. L.*), Über die Bernouillische Reihenentwicklung	162.	203—204
— —, Der Satz von der Gebietstreue	167.	388—389
— —, s. König, R. und M. Krafft.		
Krull, W. (*Erlangen*), Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten	164.	12—26
— —, Allgemeine Bewertungstheorie	167.	160—196
Landau, E. (*Göttingen*), Bestimmung der genauen Konstanten in einem Koebeschen Hilfssatz	161.	135—136
— —, Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes	165.	1—3
Levi, F. (*Leipzig*), Über repartitive Mengeneigenschaften	161.	101—106
Li, T. (*China, z. Zt. München*), Neue Beweise zu den Carmichaelschen Sätzen über die Reihe $\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x+n)$	169.	87—91
— —, Berichtigung zu vorstehender Arbeit.	170.	241
Lichtenstein, L. (*Leipzig*), Zur Variationsrechnung. Zweite Mitteilung: Das isoperimetrische System	165.	194—216
Linfoot, E. H. (*Princeton*), s. Evelyn, C. I. A. und E. H. Linfoot.		
Lipka, St. (*Szeged*), Ein Extremalproblem, nebst Anwendung auf eine Stabilitätsfrage	166.	9—15
Littlewood, I. E. (*Cambridge*), s. Hardy, G. H. und I. E. Littlewood.		

	Band	Seite
Löbell, F. (*Stuttgart*), Ein Satz über die eindeutigen Bewegungen Clifford-Kleinscher Flächen in sich	162.	114—124
— —, Berichtigung zu vorstehender Arbeit	163.	134
— —, Zur Frage der Struktur der geschlossenen geodätischen Linien in den offenen Clifford-Kleinschen Flächen mit positiver Charakteristik	162.	125—131
— —, Gewindebüschel und ihre Invarianten	164.	64—66
Lorenz, P. (*Berlin*), Über gewisse Funktionen, die in der mathematischen Konjunkturforschung eine große Rolle spielen	168.	170—175
Lorey, W. (*Leipzig*), Niels Henrik Abel. Zur hundertsten Wiederkehr seines Todestages	161.	65—72
— —, Eine Lücke in Leonhard Eulers Beweis, daß eine ganze rationale Funktion einer Veränderlichen nicht nur Primzahlen darstellen kann	170.	129—132
Lubelski, S. (*Warschau*), Zur Theorie der höheren Kongruenzen	162.	63—68
Magnus, W. (*Frankfurt a. M.*), Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. (Der Freiheitssatz.)	163.	141—165
— —, Über den Beweis des Hauptidealsatzes	170.	235—240
Mahler, K. (*Göttingen*), Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I	166.	118—136
— —, — —. Teil II	166.	137—150
— —, Ein Beweis der Transzendenz der P-adischen Exponentialfunktion	169.	61—66
— (*Manchester*), Über die rationalen Punkte auf Kurven vom Geschlecht Eins	170.	168—178
Maier, W. (*Frankfurt a. M.*), Bernouillische Polynome und elliptische Funktionen	164.	85—111
— —, Theorie der s-Funktion	166.	101—115
Mathewson, L. C. (*Hanover, U. S. A.*), A simple proof of a Theorem of Kronecker	161.	255
v. Mises, R. (*Berlin*), Über einige Abschätzungen von Erwartungswerten	165.	184—193
Mordell, L. J. (*Manchester*), The condition for integer solutions of $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$	164.	40—49
— —, On binary quadratic forms expressable as a sum of three linear squares with integer coefficients	167.	12—19
Moriya, M. (*z. Zt. Marburg*), Über die Fermatsche Vermutung	169.	92—97
Mühlendyck, O. (*Berlin*), Über eine Familie analytischer Regelflächen	164.	128—130
Myrberg, P. J. (*Helsinki*), Über stetige Funktionen einer reellen Variablen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen	170.	107—122
Nagell, T. (*Oslo*), Zur Theorie der algebraischen Ringe	164.	80—84
— (*Upsala*), Bemerkungen über numerisches Rechnen mit algebraischen Zahlen	167.	70—72
Nagy, v. Sz., J. (*Szeged*), Über einen Satz von Laguerre	169.	186—192
— —, Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen	170.	133—147
— —, Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen	170.	148—153
Neiß, F. (*Berlin-Charlottenburg*), Darstellung relativ Abelscher Zahlkörper durch Primkörper und Einheitskörper	166.	30—53
Netanjahu Mileikowsky, E. (*Jerusalem*), Elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung	166.	116—117
Neumann, E. R. (*Marburg*), Über die Hauptkerne von Integralgleichungen	167.	390—398
v. Neumann, J. (*Berlin*), Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen	161.	208—236
— —, Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maße Null“	165.	109—115
Noether, E. (*Göttingen*), Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung	167.	147—152
— —, s. Brauer, R., H. Hasse und E. Noether.		
Obreschkoff, N. (*Sofia*), Über einige Verallgemeinerungen der Borelschen Summierung der divergenten Reihen	166.	208—219

	Band	Seite
Ore, Ö. (*New Hawen, U. S. A.*), Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Erster Teil.)	167.	221—234
— —, — —. (Zweiter Teil.)	168.	233—252
Ostrowski, A. (*Basel*), Über Nullstellen stetiger Funktionen zweier Variabeln	170.	83—94
Perron, O. (*München*), Über Stabilität und asymtotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen	161.	41—64
Pólya, G. (*Zürich*) und **Szegö, G.** (*Königsberg i. Pr.*), Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen	165.	4—49
Popken, J. (*Smilde, Niederlande*), s. Koksma, I. F. und J. Popken.		
Prüfer, H. (*Münster*), Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern	168.	1—36
Rademacher, H. (*Breslau*), Zur Theorie der Modulfunktionen	167.	312—336
Rados, G. (*Budapest*), Über die Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes	162.	198—202
Rau, H. (*Königsberg i. Pr.*), Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen	161.	237—254
Reichardt, H. (*Marburg a. Lahn*), Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper	170.	75—82
— —, s. Rédei, L. und H. Reichardt.		
Rédei, L. (*Mezötur, Ungarn*) und **Reichardt, H.** (*Marburg a. Lahn*), Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers	170.	6 —74
Reidemeister, K. (*Königsberg i. Pr.*), Über die Autormorphismen von Wegegruppen	167.	79—87
Rella, T. (*Graz*), Über Abelsche Operatorgruppen	167.	235—247
Remak, R. (*Berlin*), Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen	162.	1—16
— —, Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte	163.	1—44
— —, Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen	164.	197—242
— —, Elementare Abschätzungen von Fundamentaleinheiten und des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers	165.	159—179
— —, Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktoren	166.	65—100
— —, Über die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten	167.	360—378
Rosenthal, A. (*Heidelberg*), Über Kontinua von endlicher Ordnung	167.	270—273
Rothe, E. (*Breslau*), Über die Integralgleichung des Skineffekts	170.	218—230
Rychlík, K. (*Prag*), Eine Bemerkung zur Determinantentheorie	167.	197
Schaaff, W. (*Mannheim-Feudenheim*), Biegung mit Erhaltung zylindrischer konjugierter Systeme	162.	205—237
Schlesinger, L. (*Gießen*), Über Parallelverschiebung in der Weltgeometrie	161.	14—20
— —, Über den Logarithmus einer Matrix	161.	199—200
— —, Ein Produktintegral mit Stetigkeitssprung	167.	73—78
Schmeidler, W. (*Breslau*), Zum Äquivalenzproblem beschränkter Bilinearformen	163.	135—140
— —, Über Verzweigungspunkte bei Körpern von algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlicher	167.	248—263
Schmidt, F. K. (*Erlangen*), Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen	162.	155—168
— —, s. Hasse, H. und F. K. Schmidt.		
Schmidt, H. (*Jena*), s. König, R. und H. Schmidt.		
Schmidt, R. (*Kiel*), s. Hellerich, J. und R. Schmidt.		
Scholz, A. (*Freiburg i. Br.*), Zwei Bemerkungen zum Klassenkörpertum	161.	201—207
— —, Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander	166.	201—203

	Band	Seite
Schönhardt, E. (*Tübingen*), Über lateinische Quadrate und Unionen ...	163.	183—230
Schumacher, R. (*München*), Zwei- und Drei-Punktesysteme auf Kurven	163.	125—133
Schur, I. (*Berlin*), Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome	165.	52—58
— —, Einige Bemerkungen über die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers	167.	264—269
Sidon, S. (*Budapest*), Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen	163.	251—252
— —, Verallgemeinerung der in meiner Arbeit: „Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen“ (dieses Journal Bd. 163) bewiesenen Sätze	166.	62—63
Siegel, C. L. (*Frankfurt a. M.*), Über die Perioden elliptischer Funktionen	167.	62—69
Späth, H. (*Tübingen*), Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz	161.	95—100
Speiser, A. (*Zürich*), Über die Minima Hermitescher Formen	167.	88—97
Strubecker, K. (*Wien*), Über eine Kreisfigur	169.	79—86
Svenson, E. (*Riga*), Beiträge zur Theorie gewisser Integraltypen	170.	179—196
Szegö, G. (*Königsberg i. Pr.*), s. Pólya, G. und G. Szegö.		
Taussky, O. (*Wien*), Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper	168.	193—210
Thum, P. B. (*Rom*), Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen	168.	65—90
Toeplitz, O. (*Bonn*), s. Köthe, G. und O. Toeplitz.		
Tornier, E. (*Kiel*), Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	163.	45—64
v. Török, E. (*Pécs*), Bemerkungen zu einem Satz von Stickelberger ...	166.	59—61
Tschebotaröw, N. (*Kasan*), Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers ...	161.	179—193
— —, Berichtigung zu vorstehender Arbeit	164.	196
— —, Untersuchungen über relativ Abelsche Zahlkörper	167.	98—121
Ullrich, E. (*Marburg a. d. Lahn*), Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen	166.	220—234
— —, Über den Einfluß der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung	167.	198—220
Vassiliou, Ph. (*Saloniki*), Bestimmung der Führer der Verzweigungskörper relativ-abelscher Zahlkörper. Beweis der Produktformel für den Führer-Diskriminanten-Satz	169.	131—139
Volk, O. (*Würzburg*), Über dreifache Flächensysteme, die sich in Geodätischen schneiden	169.	98—102
Wahlin, G. E. (*Columbia*), The multiplicative representation of the principal units of a relative cyclic field	167.	122—128
Walfisz, A. (*Radość*), Teilerprobleme. Dritte Abhandlung	169.	111—130
Watson, G. N. (*Birmingham*), Über die Schläflischen Modulargleichungen	169.	238—251
Wedderburn, J. H. M. (*Princeton*), Non-commutative domains of integrity	167.	129—141
Wegner, U. (*Darmstadt*), Zur Theorie der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad. I	168.	176—192
— —, Ein Satz über die Zerlegung von Primzahlen bestimmter arithmetischer Progressionen in algebraischen Zahlkörpern	168.	231—232
Weiß, E. A. (*Bonn*), Über ein Bild der R_4-Konfiguration $(10_6\, 15_4)$ im Linienraum	164.	256—258
— —, Der Hyperkreis und sein Laguerresches Bild	166.	193—200
Wellstein, J. (*Karlsruhe*), Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen	163.	166—182
— —, Vandermondesche Determinanten, Partialbruchzerlegung, Interpolationsaufgabe von Lagrange-Hermite	166.	235—240
Wernick, G. (*Kiel*), Die Unabhängigkeit des zweiten distributiven Gesetzes von den übrigen Axiomen der Logistik	161.	123—134

	Band	Seite
Wilton, J. R. (*Adelaide, South Australia*), An approximate functional equation with applications to a problem of Diophantine approximation	169.	219—237
Mitteilung betreff. Internationaler Mathematikerkongreß vom 4. bis 12. September 1932 in Zürich	166.	64
Mitteilung der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften betreff. Vertrieb von Sonderabdrucken	166.	64
Faksimilierte Wiedergabe einer Adresse von Leopold Kronecker an Eduard Kummer zum 80. Geburtstage am 29. Januar 1890	170.	1—3